

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ
імені ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»

А. Я. Карвацький

НЕЛІНІЙНІ ЗАДАЧІ МЕХАНІКИ СУЦІЛЬНИХ СЕРЕДОВИЩ

Комп'ютерний практикум з навчальної дисципліни

*Рекомендовано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського
як навчальний посібник для студентів,
які навчаються за спеціальністю 133 «Галузеве машинобудування»,
спеціалізацією «Інжиніринг, комп'ютерне моделювання та проектування
обладнання виробництв полімерних і будівельних матеріалів і виробів»*

Київ
КПІ ім. Ігоря Сікорського
2019

Рецензент:

Коржик М. В., канд. техн. наук, доц.,
КПІ ім. Ігоря Сікорського

Відповідальний
редактор

Мікульонок І. О., д-р техн. наук, проф.

*Гриф надано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського (протокол № 8 від 25.04.2019 р.)
за поданням Вченої ради інженерно-хімічного факультету (протокол № 3 від 25.03.2019 р.)*

Електронне мережне навчальне видання

Карвацький Антон Янович, д-р техн. наук, проф.

НЕЛІНІЙНІ ЗАДАЧІ МЕХАНІКИ СУЦІЛЬНИХ СЕРЕДОВИЩ

Комп'ютерний практикум з навчальної дисципліни

Нелінійні задачі механіки суцільних середовищ. Комп'ютерний практикум з навчальної дисципліни [Електронний ресурс]: навч. посіб. для студ. спеціальності 133 «Галузеве машинобудування», спеціалізації «Інжиніринг, комп'ютерне моделювання та проектування обладнання виробництв полімерних і будівельних матеріалів і виробів» / А. Я. Карвацький ; КПІ ім. Ігоря Сікорського. – Електронні текстові дані (1 файл: 2,480 Мбайт). – Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2019. – 158 с.

Подано математичні постановки нелінійних задач механіки суцільних середовищ (МСС) та викладено числові методики їх розв'язання з використанням методу скінченних елементів. Надано програмні коди Mathcad для розв'язання тривимірних нелінійних задач для комп'ютерних практикумів МСС та виконано їх верифікацію. Розглянуто приклади побудови геометрії найпростіших об'єктів і генерації розрахункових сіток з використанням вільно відкритого програмного забезпечення Gmsh. Наведено приклади візуалізації скінченно-елементних розв'язків нелінійних задач МСС з використанням вільно відкритого програмного коду ParaView.

Для студентів вищих навчальних закладів, які навчаються за спеціальністю «Галузеве машинобудування» та іншими спорідненими спеціальностями, що стосуються теплоенергетики, будівельної, нафтопереробної та харчової галузей промисловості.

УДК 531/534:519.6(075.8)

© А. Я. Карвацький, 2019

© КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2019

ВСТУП

Навчальний посібник з дисципліни «Механіка суцільних середовищ (додаткові розділи)» (МСС) присвячено числовому розв'язанню методом скінченних елементів (МСЕ) таких важливих для наукової та інженерної практики нелінійних задач, як: нелінійна нестационарна теплопровідність з внутрішніми джерелами теплоти, нелінійна нестационарна тепло-електропровідність, пружно-пластичність ізотропного матеріалу включаючи сипкий матеріал. Для програмної реалізації числових методик розв'язання нелінійних задач обрано мову програмування системи **Mathcad**. Це забезпечує максимальну наочну схожість програмного коду з числовими методиками розв'язання нелінійних задач МСС. При цьому для побудови геометричних моделей розрахункових областей задач запропоновано використовувати вільно відкрите програмне забезпечення **Gmsh**, а для візуалізації результатів розрахунків – вільно відкритий програмний код **ParaView**.

Навчальний посібник базується на наукових статтях, монографіях, підручниках та навчальних посібниках таких відомих авторів як Zienkiewicz O.C., Taylor R.L., Fox D.D., Simo J. C., Segerlind L. J., R. de Borst, Crisfield M. A., Remmers J. J.C, Самарский А. А., Попов Ю. П. і включає чотири розділи із запитаннями для самоконтролю. У тексті навчального посібника наведено математичні формулювання нелінійних задач, методики їх числового розв'язання на базі МСЕ, приклади програмної реалізації числових методик та їх верифікація, приклади візуалізації результатів розрахунків, тексти програмних кодів розроблених у системі **Mathcad**. У цілому, викладений у посібнику матеріал відрізняється від класичних підручників з МСС наявністю детального опису програмної реалізації числових методик та візуалізації результатів розрахунків з наведенням розроблених текстів програмних кодів.

У посібнику використовуються тільки декартові тензори як головна база для описання суті багатьох теорій континууму. Усі важливі рівняння та фундаментальні співвідношення в основному наводяться як у тензорній, або індексній, так і в класичній символічній, або векторній формах запису, що дає змогу студентам порівняти еквівалентні вирази та застосовувати їх у подальшому. У чотирьох розділах посібника викладено теоретичну та прикладну базу МСС, яка стосується математичного формулювання нелінійних задач, методик їх числового розв'язання, програмної реалізації та верифікації, а саме: нестационарних нелінійних задач теплопровідності та теплоелектропровідності, пружно-пластичної поведінки ізотропних матеріалів у наближеннях ідеальної пластичності та ізотропного зміцнення, пружно-пластичної поведінки сипких матеріалів у наближенні критерію плинності Drucker-Prager. У додатках наведено програмні коди розв'язання нелінійних

задач МСС, що написані на мові програмування **Mathcad**, та деякі класичні методики числового розв'язання задач пружно-пластичності.

Навчальний посібник підготовлено на основі наукових робіт [1, 5, 15, 19, 20, 22], посібників [2, 5], лекцій та комп'ютерних практикумів, які автор читає та проводить зі студентами кафедри хімічного, полімерного та силікатного машинобудування Національного технічного університету України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського». Усі зауваження і пропозиції щодо поліпшення навчального посібника будуть сприйняті автором із вдячністю.

ОСНОВНІ ПОЗНАЧЕННЯ ТА СКОРОЧЕННЯ

Основні позначення

$[A_{ij}]$ –	матриця СЛАР;
a –	коефіцієнт температуропровідності, $\text{м}^2/\text{с}$;
$[B]$ –	матриця градієнтів СЕ;
$\{B_i\}$ –	вектор вільних членів СЛАР;
$\mathbf{\dot{b}}$ –	вектор прирощення масових сил, Н/кг ;
b_i –	компоненти вектора прирощення масових сил, Н/кг ;
$\hat{\mathbf{C}}^4$ –	тензор четвертого рангу пружних констант матеріалу, Па ;
C_{ijkl} –	компоненти тензора 4-го рангу пружних констант матеріалу, Па ;
$[C^{(e)}(\hat{T})]$ –	матриця жорсткості СЕ, що пов'язана з демпфіруванням (теплоємністю), $\text{Дж}/(\text{м}^3 \cdot \text{К})$;
$[c^{(e)}]$ –	матриця демпфірування СЕ;
c –	сила зчеплення між гранулами сипкого матеріалу, Па ;
c_p –	масова ізобарна теплоємність, $\text{Дж}/(\text{кг} \cdot \text{К})$;
$[D^{ep}]$ –	матриця пружно-пластичних властивостей СЕ;
$\hat{\mathbf{D}}^{el}$ –	тензор другого рангу пружних констант;
E –	модуль пружності під час одновісного розтягу (стискання), Па ;
$\hat{\mathbf{e}}^{pl}$ –	тензор девіаторних пластичних деформацій другого рангу;
F –	функція поверхні плинності матеріалу;
$\{f_j^{(e)}\}$ –	вектор навантаження СЕ за рахунок заданої густини електричного струму на границі $\Gamma_{U \Pi}$ частини поверхні Ω , А/м^3 ;
$\{f_q^{(e)}\}$ –	вектор СЕ, що пов'язана з густиною теплового потоку, Вт/м^3 ;
$\{f_{qv}^{(e)}(\hat{T})\}$ –	вектор СЕ, що пов'язаний з внутрішнім джерелом теплоти, Вт/м^3 ;
$\{f_{\alpha}^{(e)}(\hat{T})\}$ –	вектор СЕ, що пов'язаний із зовнішнім конвективним теплообміном, Вт/м^3 ;
G –	модуль зсуву, Па ; потенційна функція критерію плинності;
h –	модуль зміцнення, Па ;
$h(T)$ –	об'ємна ентальпія, Дж/м^3 ;
$\hat{\mathbf{I}}$ –	одиничний тензор другого рангу;
j_n –	нормальна складова вектора густини електричного струму, А/м^2 ;

$[K_{\alpha}^{(e)}(\hat{T})]$ –	матриця жорсткості СЕ, що пов’язана із зовнішнім конвективним теплообміном, Вт/(м ³ ·К);
$[K_{\chi}^{(e)}(\hat{T})]$ –	матриця СЕ, що пов’язана з електропровідністю, См/м ³ ;
$[K_{\lambda}^{(e)}(\hat{T})]$ –	матриця жорсткості СЕ, що пов’язана з теплопровідністю, Вт/(м ³ ·К);
$[k_{\alpha}^{(e)}]$ –	матриця жорсткості скінченного елемента, що пов’язана із зовнішнім конвективним теплообміном;
$[k_{\lambda}^{(e)}]$ –	матриця жорсткості скінченного елемента, що пов’язана з теплопровідністю;
M –	кількість СЕ;
$\hat{\mathbf{m}} = \frac{\partial F}{\partial \hat{\boldsymbol{\sigma}}}$ –	похідна від функції пластичності за тензором напруження;
$[N]$ –	матриця-рядок коефіцієнтів форми СЕ;
N –	кількість вузлів у розрахунковій області; кількість кроків навантаження;
\mathbf{n} –	вектор зовнішньої нормалі до поверхні Ω ;
n_i –	компоненти вектора зовнішньої нормалі до поверхні тіла;
p –	тиск, Па;
q_n –	нормальна складова вектора густини теплового потоку, Вт/м ² ;
\mathbf{q} –	вектор густини теплового потоку, Вт/м ² ;
q_v –	об’ємна густина внутрішнього джерела теплоти, Вт/м ³ ;
r_F –	вектор відхилу (нев’язки) за функцією плинності;
$\mathbf{r}_{\boldsymbol{\sigma}}$ –	вектор відхилу (нев’язки) за напруженнями, Па;
$S^{(e)}$ –	поверхня грані СЕ, м ² ;
$\hat{\mathbf{s}}$ –	тензор девіаторних напружень другого рангу, Па;
s_{ij} –	компоненти тензора девіаторних напружень, Па;
T –	абсолютна температура, К;
T_0 –	початкова абсолютна температура, К;
T_b –	абсолютна температура на границі Γ_1 поверхні Ω , К;
$T_m^{(e)}$ –	середня температура СЕ, К;
T_p –	абсолютна температура оточуючого середовища, К;
T_{ref} –	абсолютна температура відліку, К;
t –	температура, °С;
U –	електричний потенціал, В;
$\{\hat{U}^{(e)}\}$ –	вектор електричного потенціалу СЕ на верхньому часовому рівні, В;
$\dot{\mathbf{u}}$ –	вектор прирощення переміщень, м;

\dot{u}_i –	компоненти вектора прирощення переміщення, м;
$V^{(e)}$ –	об'єм СЕ, м ³ ;
\mathbf{x} –	радіус-вектор декартової системи координат, м;
$x_i, i = 1, 2, 3$ –	декартові координати, м;
α –	коефіцієнт тепловіддачі, Вт/(м ² ·К);
χ –	коефіцієнт електропровідності, См/м;
$\Delta \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^{pl}$ –	тензор прирощення пластичної деформації;
$\Delta \varepsilon_{kl}^{pl}$ –	компоненти тензора прирощення пластичної деформації на i -му кроці навантаження;
$\Delta \lambda$ –	скалярний асоціативний множник (коефіцієнт пластичності);
δ_{ij} –	символ Кронекера;
δ_u –	точність розрахунку поля переміщень, м;
δ_ε –	точність розрахунку поля деформацій, м;
$\{\delta \hat{U}^{k+1}\}$ –	вектор нев'язки за електричним потенціалом
$\{\delta \hat{T}^{k+1}\}$ –	вектор нев'язки за температурою, К;
$\dot{\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}}$ –	симетричний тензор прирощення повних деформацій другого рангу;
$\dot{\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}}^{el}, \dot{\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}}^{pl}$ –	пружна і пластична складові тензора прирощення повних деформацій $\dot{\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}}$, відповідно;
$\dot{\varepsilon}_{ij}^{el}, \dot{\varepsilon}_{ij}^{pl}$ –	пружна та пластична складові тензора прирощення повних деформацій $\dot{\varepsilon}_{ij}$, відповідно;
ε_{eq}^{pl} –	еквівалентна пластична деформація за Мізесом;
$\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^{tr}$ –	тензор пробних (повних) деформацій другого рангу, що визначається в наближенні пружного середовища;
ε_{kl}^{tr} –	компоненти тензора пробних (повних) деформацій 2-го рангу;
ε_T –	точність розрахунку поля температури, К;
γ –	кут дилатансії, рад;
φ –	кут внутрішнього тертя або кут природного укосу сипкого матеріалу, рад;
λ –	коефіцієнт теплопровідності, Вт/(м·К);
ν –	коефіцієнт Пуассона;
ν' –	ефективний коефіцієнт Пуассона;
ρ –	густина, кг/м ³ ;
$\dot{\hat{\boldsymbol{\sigma}}}$ –	симетричний тензор прирощення напружень другого рангу, Па;
$\hat{\boldsymbol{\sigma}}^{tr}$ –	тензор пробних напружень, Па;
$\dot{\sigma}_{ij}$ –	компоненти симетричного тензора прирощення напруження 2-го рангу, Па;

σ_{eq} –	еквівалентне напруження за Мізесом, Па;
σ_{eqDP} –	еквівалентне напруження за Drucker-Prager, Па;
σ_m –	гідростатичний тиск, Па;
$\sigma_y(\varepsilon_{eq}^{pl})$ –	границя плинності матеріалу з врахуванням ізотропного зміцнення за лінійним законом, Па;
$\sigma_y(c, \varphi)$ –	границя плинності сипкого матеріалу, Па;
$\dot{\sigma}^0$ –	тензор прирощення початкових напружень, Па;
$\dot{\sigma}_{ij}^0$ –	компоненти тензора прирощення початкового напруження, Па;
τ –	час, с;
$\Omega \in R^3$ –	тривимірна розрахункова область.

Основні індекси

0 –	стосується початкового стану;
b –	стосується границі тіла;
(e) –	стосується скінченного елемента;
el –	стосується пружності;
n –	стосується нормалі;
p –	стосується тиску;
pl –	стосується пластичності;
su –	стосується поверхні симетрії;
u –	стосується переміщення.

Інші символи

div –	оператор дивергенції;
grad –	оператор градієнта;
$\text{tr}(\)$ –	оператор сліду тензора;
∇ –	оператор Гамільтона;
(\cdot) –	оператор скалярного добутку векторних величин;
$(:)$ –	оператор подвійного скалярного множення.

Основні скорочення

RMA –	Return-Mapping Algorithms;
ГУ –	граничні умови;
MCE –	метод скінченних елементів;
MCC –	механіка суцільних середовищ;
CE –	скінченний елемент;
СЛАР –	система лінійних алгебричних рівнянь.

1. НЕЛІНІЙНА НЕСТАЦІОНАРНА ТЕПЛОПРОВІДНІСТЬ ІЗОТРОПНОГО СЕРЕДОВИЩА З ВНУТРІШНІМИ ДЖЕРЕЛАМИ ТЕПЛОТИ

1.1. Математична постановка задачі

Рівняння нелінійної нестационарної теплопровідності ізотропного середовища з внутрішніми джерелами теплоти має вигляд [1, 2]:

$$\begin{aligned} c_p(T)\rho(T)\frac{\partial T}{\partial \tau} &= \nabla \cdot [\lambda(T(\mathbf{x}))\nabla T(\mathbf{x})] + q_v(T(\mathbf{x})), \quad \tau > 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega \\ \text{або} \quad \begin{cases} c_p(T)\rho(T)\frac{\partial T}{\partial \tau} = \operatorname{div} \mathbf{q} + q_v(T(\mathbf{x})); \\ \mathbf{q} = \lambda(T(\mathbf{x}))\operatorname{grad} T(\mathbf{x}), \end{cases} \end{aligned} \quad (1.1)$$

де c_p – масова ізобарна теплоємність, Дж/(кг·К); ρ – густина, кг/м³; T – абсолютна температура, К; τ – час, с; $\nabla = \frac{\partial}{\partial x_i}$, $i=1,2,3$ – оператор Гамільтона, м⁻¹; x_i , $i=1,2,3$ – декартові координати, м; (\cdot) – оператор скалярного добутку; λ – коефіцієнт теплопровідності, Вт/(м·К); \mathbf{x} – радіус-вектор декартової системи координат, м; q_v – об’ємна густина внутрішнього джерела теплоти, Вт/м³; $\Omega \in R^3$ – тривимірна розрахункова область; \mathbf{q} – вектор густини теплового потоку, Вт/м²; div – оператор дивергенції; grad – оператор градієнта.

Початкові умови для (1.1) в момент часу $\tau = 0$:

$$T(\mathbf{x})|_{\Omega} = T_0, \quad (1.2)$$

де T_0 – початкова абсолютна температура, К.

Граничні умови (ГУ) для (1.1) в момент часу $\tau > 0$ можуть включати ГУ трьох родів:

– I роду – задана абсолютна температура T_b на границі Γ_I поверхні Ω

$$T(\mathbf{x})|_{\Gamma_I} = T_b; \quad (1.3)$$

– II роду – задана нормальна складова вектора густини теплового потоку на границі Γ_{II} поверхні Ω

$$q_n|_{\Gamma_{II}} = \mathbf{n} \cdot [-\lambda(T)\nabla T], \quad (1.4)$$

де q_n – нормальна складова вектора густини теплового потоку $\mathbf{q} = -\lambda(T)\nabla T$, Вт/м²; \mathbf{n} – вектор зовнішньої нормалі до поверхні Ω ;

– III роду – задані конвективні умови теплообміну на границі Γ_{III} поверхні Ω

$$\mathbf{n} \cdot [-\lambda(T)\nabla T]_{\Gamma_{III}} = \alpha(T)(T - T_p), \quad (1.5)$$

де α – коефіцієнт тепловіддачі, Вт/(м²·К); T_p – абсолютна температура оточуючого середовища, К.

Система рівнянь (1.1)–(1.5) є повним формулюванням нелінійної нестационарної задачі теплопровідності ізотропного середовища з внутрішніми джерелами теплоти.

1.2. Методика числового розв'язання задачі

Для числового розв'язання сформульованої задачі використовується методом скінченних елементів (МСЕ) [3–5]. Для формулювання системи дискретних рівнянь МСЕ використаємо метод Гальоркіна, тобто коли за вагову функцію обирається функція форми скінченного елемента (СЕ). У результаті для (1.1)–(1.5), після дискретизації Ω на СЕ і, використовуючи для похідної за часом перший порядок апроксимації $O(\Delta\tau)$ [2, 6], отримуємо таку систему дискретних рівнянь МСЕ за умови її формування за СЕ [1]

$$\sum_{e=1}^M \left\{ -[C^{(e)}(\hat{T})] \frac{\{\hat{T}^{(e)}\} - \{T^{(e)}\}}{\Delta\tau} - ([K_\lambda^{(e)}(\hat{T})] + [K_\alpha^{(e)}(\hat{T})]) \{\hat{T}^{(e)}\} + \{f_{q_v}^{(e)}(\hat{T})\} + \{f_\alpha^{(e)}(\hat{T})\} - \{f_q^{(e)}\} \right\} = 0, \quad (1.6)$$

де (e) – індекс СЕ; M – кількість СЕ; $\{\hat{T}\}$, $\{T\}$ – вектори абсолютної температури СЕ на верхньому та нижньому часових рівнях, відповідно, К; $[C^{(e)}(\hat{T})]$, $[K_\lambda^{(e)}(\hat{T})]$, $[K_\alpha^{(e)}(\hat{T})]$ – матриці жорсткості СЕ, що пов'язані з демпфіруванням (теплоємністю) (Дж/(м³·К)), теплопровідністю (Вт/(м³·К)) та зовнішнім конвективним теплообміном (Вт/(м³·К)), відповідно; $\{f_{q_v}^{(e)}(\hat{T})\}$, $\{f_\alpha^{(e)}(\hat{T})\}$, $\{f_q^{(e)}\}$ – вектори СЕ, що пов'язані з внутрішнім джерелом теплоти, зовнішнім конвективним теплообміном і густиною теплового потоку, Вт/м³.

Інтегральні співвідношення для визначення матриць $[C^{(e)}]$, $[K_\lambda^{(e)}]$, $[K_\alpha^{(e)}]$ і векторів $\{f_{q_v}^{(e)}\}$, $\{f_\alpha^{(e)}\}$, $\{f_q^{(e)}\}$ СЕ у випадку лінійних задач наведено в [3–5]. У разі нелінійної задачі ці вирази є залежними від температури і, тому під час її розв’язання ітераційними методами потребують перерахунку на кожному кроці виконання ітерацій, що є вкрай неефективним особливо для нестационарних задач. Для того, щоб цього уникнути, необхідно попередньо виконати їх перетворення, враховуючи при цьому ізотропність фізичних властивостей середовища. Наприклад, для матриці жорсткості, пов’язаної з теплопровідністю, матимемо [1]

$$[K_\lambda^{(e)}(\hat{T})] = \int_{V^{(e)}} \lambda(T) [B]^T [B] dV \approx \lambda(T_m^{(e)}) \int_{V^{(e)}} [B]^T [B] dV = \lambda(T_m^{(e)}) [k_\lambda^{(e)}], \quad (1.7)$$

для матриці жорсткості, пов’язаної із зовнішнім конвективним теплообміном [1]

$$[K_\alpha^{(e)}(\hat{T})] = \int_{S^{(e)}} \alpha(T) [N]^T [N] dS \approx \alpha(T_m^{(e)}) \int_{S^{(e)}} [N]^T [N] dS = \alpha(T_m^{(e)}) [k_\alpha^{(e)}], \quad (1.8)$$

для матриці демпфірування [1]

$$[C^{(e)}(\hat{T})] = \int_{V^{(e)}} c_p(T) \rho(T) [N]^T [N] dV \approx c_p(T_m^{(e)}) \rho(T_m^{(e)}) \int_{V^{(e)}} [N]^T [N] dV = c_p(T_m^{(e)}) \rho(T_m^{(e)}) [c^{(e)}], \quad (1.9)$$

де $V^{(e)}$ – об’єм СЕ; $S^{(e)}$ – поверхня грані СЕ; $[N]$ – матриця-рядок коефіцієнтів форми СЕ; $[B] = \nabla[N]$ – матриця градієнтів СЕ; $T_m^{(e)} = \frac{\sum_{i=1}^M T_i}{M}$ – середня температура СЕ; $[k_\lambda^{(e)}] = \int_{V^{(e)}} [B]^T [B] dV$, $[k_\alpha^{(e)}] = \int_{S^{(e)}} [N]^T [N] dS$, $[c^{(e)}] = \int_{V^{(e)}} [N]^T [N] dV$.

Аналогічні перетворення також виконуються і для векторів $\{f_{q_v}^{(e)}(\hat{T})\}$, $\{f_\alpha^{(e)}(\hat{T})\}$. Тепер матриці $[c^{(e)}]$, $[k_\lambda^{(e)}]$, $[k_\alpha^{(e)}]$ та вектори $\{f_{q_v}^{(e)}\}$, $\{f_\alpha^{(e)}\}$ СЕ потребують тільки одноразового обчислення на початку ітераційного розв’язання задачі. У результаті виконаних перетворень (1.7)–(1.9) і переходом до ентальпійної форми запису система дискретних рівнянь МСЕ (1.6) набуває вигляду [1]

$$\sum_{e=1}^M \left\{ -[c^{(e)}] \frac{\{\hat{h}^{(e)}\} - \{h^{(e)}\}}{\Delta\tau} - ([k_\lambda^{(e)}] \lambda(\hat{T}_m^{(e)}) + [k_\alpha^{(e)}] \alpha(\hat{T}_m^{(e)})) \{\hat{T}^{(e)}\} + \right. \\ \left. + \{f_{q_v}^{(e)}\} q_v(\hat{T}_m^{(e)}) + \{f_\alpha^{(e)}\} \alpha(\hat{T}_m^{(e)}) T_p - \{f_q^{(e)}\} \right\} = 0, \quad (1.10)$$

де $h(T) = \int_{T_{\text{ref}}}^T c_p(T) \rho(T) dT$ – об’ємна ентальпія, Дж/м³; T_{ref} – абсолютна температура відліку, К; $\hat{h}^{(e)}$ і $h^{(e)}$ – значення об’ємної ентальпії СЕ на верхньому та нижньому часових рівнях, відповідно, Дж/м³; $\{f_{q_v}^{(e)}\} = \int_{V^{(e)}} [N]^T dV$; $\{f_\alpha^{(e)}\} = \int_{S^{(e)}} [N]^T dS$.

У системі рівнянь (1.10) вектор $\{f_q^{(e)}\}$ не зазнав перетворення, оскільки він не залежить від температури.

Після часткової лінеаризації за методом Ньютона [6] система дискретних рівнянь (1.10) набуває вигляду [1]

$$\sum_{e=1}^M \left\{ [k_\lambda^{(e)}] \left[\frac{\partial \lambda^{(e)}(\hat{T}^k)}{\partial T} \hat{T}^k + \lambda^{(e)}(\hat{T}^k) \right] + [k_\alpha^{(e)}] \left[\frac{\partial \alpha^{(e)}(\hat{T}^k)}{\partial T} \hat{T}^k + \alpha^{(e)}(\hat{T}^k) \right] + \right. \\ \left. + [c^{(e)}] \frac{c_p^{(e)}(\hat{T}^k) \rho^{(e)}(\hat{T}^k)}{\Delta\tau} - \{f_\alpha^{(e)}\} \left[\frac{\partial \alpha^{(e)}(\hat{T}^k)}{\partial T} \right]^T T_p - \{f_{q_v}^{(e)}\} \left[\frac{\partial q_v^{(e)}(\hat{T}^k)}{\partial T} \right]^T \right\} \times \\ \times \{\delta \hat{T}^{k+1}\} = \sum_{e=1}^M \{f^{(e)}\}, \quad (1.11)$$

де $\{f^{(e)}\} = -[c^{(e)}] \frac{\{\hat{h}^{(e)}(\hat{T}^k)\} - \{h^{(e)}(T^k)\}}{\Delta\tau} - ([k_\lambda^{(e)}] \lambda(\hat{T}^k) + [k_\alpha^{(e)}] \alpha(\hat{T}^k)) \{\hat{T}^k\} +$ $+ \{f_{q_v}^{(e)}\} q_v(\hat{T}_m^k) + \{f_\alpha^{(e)}\} \alpha(\hat{T}_m^k) T_p - \{f_q^{(e)}\}$ – вільний член системи рівнянь; $\{\delta \hat{T}^{k+1}\}$ – вектор відхилу за температурою; k – номер ітерації на кожному кроці інтегрування за часом.

Систему рівнянь (1.11) можна також переписати відносно вузлових невідомих $\delta \hat{T}$. Наприклад, у разі нелінійності, що спричинена температурною залежністю $c_p, \rho, \lambda, \alpha$, матимемо таку систему лінеаризованих рівнянь [1]

$$[A_{ij}] \{\delta T_j\} = \{B_i\}, \quad i, j = \overline{1, N}, \quad (1.12)$$

де

$$[A_{ij}] = [k_{\lambda ij}] \left(\frac{\partial \lambda(\hat{T}_j^k)}{\partial T} \hat{T}_j^k + \lambda(\hat{T}_j^k) \right) + [k_{\alpha ij}] \left(\frac{\partial \alpha(\hat{T}_j^k)}{\partial T} \hat{T}_j^k + \alpha(\hat{T}_j^k) \right) + [c_{ij}] \frac{c_p(\hat{T}_j^k) \rho(\hat{T}_j^k)}{\Delta \tau} -$$

$$- \{f_{\alpha i}\} \left\{ \frac{\partial \alpha(\hat{T}_j^k)}{\partial T} \right\} T_p - \text{матриця системи, що відповідає глобальним номерам вуз-}$$

$$\text{лів; } \{B_i\} = \sum_{e=1}^M \left[-[c^{(e)}] \frac{\{ \hat{h}^{(e)}(\hat{T}^k) \} - \{ h^{(e)}(T^k) \}}{\Delta \tau} - ([k_{\lambda}^{(e)}] \lambda(\hat{T}^k) + [k_{\alpha}^{(e)}] \alpha(\hat{T}^k)) \{ \hat{T}^k \} + \right.$$

$$\left. + \{f_{q_v}^{(e)}\} q_v + \{f_{\alpha}^{(e)}\} \alpha(\hat{T}_m^k) T_p - \{f_q^{(e)}\} \right] - \text{вектор вільних членів відносно глобальних}$$

$$\text{номерів вузлів.}$$

Матриця $[A_{ij}]$ є розрідженою, тому для її формування та подальшого розв'язання системи лінійних алгебричних рівнянь (1.12) зазвичай використовується її стрічкова форма [7, 8], що значно мінімізує вимоги до обчислювальних ресурсів.

Система лінеаризованих рівнянь (1.12) на кожному кроці ітерацій розв'язується відносно $\{\delta \hat{T}_j^{k+1}\}$, а шукана температура у вузлах розрахункової сітки визначається за формулою [1]

$$\{\hat{T}_i^{k+1}\} = \{\hat{T}_i^k\} + \{\delta \hat{T}_i^{k+1}\}, \quad i = \overline{1, N}, \quad (1.13)$$

де N – кількість вузлів у розрахунковій області.

Критерієм отримання числового розв'язку вихідної задачі на кожному часовому кроці є виконання умови [1]

$$|\delta \hat{T}_i^{k+1}| \leq \varepsilon_T, \quad i = \overline{1, N}, \quad (1.14)$$

де ε_T – задана точність розрахунку поля температури, К.

1.3. Програмна реалізація числової методики та верифікація

1.3.1. Побудова геометричної моделі розрахункової області та її дискретизація

Для побудови геометричної моделі розрахункової області та її дискретизації використовується вільно відкритий програмний код для автоматизованої

генерації сіток **Gmsh** [9], що дає змогу будувати прості геометричні моделі фізичних об'єктів та виконувати генерацію якісних тетраедричних сіток.

Оскільки, МСЕ не дає можливості проведення апріорних оцінок точності розрахунків [3, 5], то на практиці оцінку точності розрахунків зазвичай виконують за допомогою порівняння з точними (аналітичними) або числовими розв'язками задач, отриманими іншими авторами. Для дослідження збіжності числових розв'язків широкого застосування також набув метод подвійного перерахунку та побудови графіків збіжності результатів розрахунків до точного розв'язку [10].

Для оцінки точності числової методики обрано циліндр за адіабатних умов на бічній поверхні і граничних умов III роду на його основах (для імітації необмеженої пластини, для якої існує точний розв'язок [11]) і наявності внутрішніх джерел теплоти за умов нестационарного розподілу полів температури.

Для побудови числової моделі використано четверту частину циліндра. Побудову простої геометричної моделі чверті циліндра скінченних розмірів виконано за допомогою спеціального **geo**-файлу у програмі **Gmsh**, текст якого наведено на рис. 1.1.

```
// ініціалізація змінних
cl = 0.04;           //параметр сітки
// Параметри циліндра
r=0.05;             //радіус
h=0.1;              // висота
// точки
Point(1) = {r, 0, 0, cl};
Point(2) = {0, 0, 0, cl};
Point(3) = {0, r, 0, cl};
// лінії
Line(1) = {2, 1};
Circle(2) = {1, 2, 3};
Line(3) = {3, 2};
// замкнутий контур
Line Loop(4) = {1, 2, 3};
// поверхня
Plane Surface(1) = {4};
// витягування вздовж осі OZ
Extrude {0, 0, h} { Surface{1}; }
```

Рис. 1.1. Текст **geo**-файлу для побудови чверті циліндра у програмі **Gmsh**

Результат дискретизації моделі чверті циліндра тетраедричними СЕ, отриманий за допомогою програми **Gmsh**, наведено на рис. 1.2, який також записується у файл **Cyl.msh** для подальшого використання.

1.3.2. Програмний код, його налаштування та тестування

Для програмної реалізації запропонованої числової методики (див. підрозділ 1.2) обрано мову програмування системи **Mathcad** [12]. Це дає змогу забезпечити максимальну наочну схожість програмного коду з числовою методикою розв'язання задачі [5].

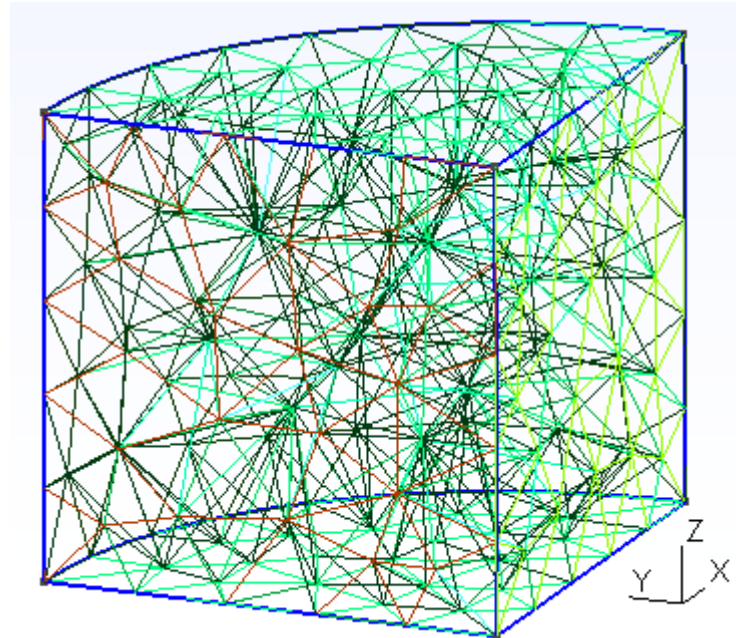


Рис. 1.2. Дискретизація моделі чверті циліндра тетраедними СЕ (178 – вузлів; 880 – скінченних елементів)

Для розв'язання нелінійної нестационарної задачі теплопровідності використовується файл **Trans_heat_cond_NL.xmcd** (додаток А.1), який є програмним кодом написаним у системі **Mathcad** [12] і який розроблено відповідно до математичної постановки задачі (див. підрозділ 1.1) та методики її числового розв'язання (див. підрозділ 1.2). Для того, щоб скористатися цим кодом спочатку треба виконати певні підготовчі операції. Для правильного зчитування даних у програмі **Mathcad** у перший рядок файлу дискретизації **Cyl.msh** (див. п. 1.3.2) необхідно додати такий рядок:

11 22 33 44 55 66 77 88 99 100

У програмі **Gmsh** також необхідно визначити номери поверхонь для задання граничних умов та глобальні номери вузлів по лініях небезпечних перетинів для побудови відповідних епюр, як це показано в [5].

Після закінчення виконання вказаних операцій файл **Trans_heat_cond_NL.xmcd** завантажується в систему **Mathcad** і розпочинається робота з адаптації програмного коду для розв'язання нестационарної задачі теплопровідності циліндра.

Спершу підключається відредагований файл **Cyl.msh** у разі, якщо він автоматично не підключився, задаються теплофізичні властивості матеріалу за даними тестових прикладів, що наведені нижче за текстом, початкова температура, параметри граничних умов, крок інтегрування за часом та їх кількість. Далі за номерами поверхонь для завдання ГУ визначаються параметри дискретизації цих поверхонь: номери трикутних елементів та номери вузлів, що їм відповідають, та задаються ГУ.

Розв'язання нестационарної задачі теплопровідності виконується послідовним переглядом файла **Trans_heat_cond_NL.xmcd** до місця запису результатів розрахунків фізичних полів. При цьому необхідно з'ясувати основні етапи розв'язання задачі: від формування глобальної матриці і вільного члена системи лінійних алгебричних рівнянь (СЛАР) та її розв'язання відносно прирощення температури на кожному кроці інтегрування за часом до розрахунку компонент вектора густини теплового потоку в СЕ та глобальних вузлах, розрахунку результуючої густини теплового потоку в глобальних вузлах, запису результатів розрахунків фізичних полів у файли **...\Result_1.dat** і **...\NNodes_Elements.dat** аналогічно [5]. Формування текстового файлу формату **Tecplot** здійснюється так само, як це описано в [5]. Епюри фізичних полів по лініях у небезпечних перетинах конструкції будуються за визначеними у програмі **Gmsh** номерами глобальних вузлів після їх запису у відповідний вектор у коді **Trans_heat_cond_NL.xmcd** [5].

Тестування розробленого програмного забезпечення у середовищі **Mathcad** для розв'язання нестационарної задачі теплопровідності (1.1)–(1.5) за числовою методикою (1.6)–(1.14) виконано за трьома тестами.

Тест 1. Нестационарна теплопровідність під час охолодження необмеженої пластини за граничних умов конвективного типу: товщина пластини $2\delta = 20$ мм, початкова температура $t_0 = 140$ °С, температура повітря $t_p = 15$ °С, тривалість охолодження $\tau = 20$ хв, теплопровідність гуми $\lambda = 0,175$ Вт/(м·К), температуропровідність гуми $a = 0,833 \cdot 10^{-7}$ м²/с, коефіцієнт тепловіддачі від гуми до повітря $\alpha = 65$ Вт/(м²·К) (табл. 1.1).

Тест 2. Нелінійна нестационарна теплопровідність циліндра радіусом 0,05 м і заввишки 0,1 м з коефіцієнтом теплопровідності $\lambda(t) = 159,218e^{-1,116 \times 10^{-3}t}$ Вт/(м·К), масовою ізобарною теплоємністю $c_p(t) = 712,2 + 2,933 \times 10^{-7}t^3 - 1,444 \times 10^{-3}t^2 + 2,406t$ Дж/(кг·К) і густиною $\rho(t) = 1853 - 5,453 \times 10^{-5}t^2 - 0,127t$ за граничних умов III роду на торцях: нижній торець $\alpha_1 = 10$ Вт/(м²·К), $t_{p1} = 35$ °С; верхній торець $\alpha_2 = 35$ Вт/(м²·К), $t_{p2} = 250$ °С. Початкова температура $t_0 = 35$ °С (табл. 1.2).

Табл. 1.1. Зіставлення даних аналітичного і числового розв'язків нестационарної задачі теплопровідності необмеженої пластини за граничних умов III роду

Тип розв'язку	Температура на осі пластини $t_{x=0}$, °C	Температура на поверхні пластини $t_{x=\delta}$, °C
Точний розв'язок [11]	47,563	25,453
Mathcad , $\Delta\tau = 5$ с, 240 кроків, вузлів 907, СЕ – 3535	47,604	25,171
Похибка, %	0,086	1,11

Табл. 1.2. Результати порівняння за тестом 2

	$t_c - t_0$, °C				
Час, год	1	3	5	7	10
ANSYS Mchanical APDL [13], 120 кроків за часом, вузлів 810, СЕ – 3509	136,21– 138,02	188,17– 189,58	198,35– 199,68	200,56– 201,87	201,13– 202,44
Mathcad , 120 кроків за часом, вузлів 1218, СЕ – 4804	136,02– 138,15	187,91– 189,7	198,07– 199,78	200,27– 201,96	200,84– 202,53
Похибка, %	0,14–0,094	0,14–0,063	0,14–0,05	0,14–0,04	0,14–0,04

Тест 3. Умови тесту 4, але з $q_v = 2,5 \cdot 10^5$ Вт/м³ та граничними умовами III роду на бічній стороні: $\alpha_3 = 10$ Вт/(м²·К), $t_{p3} = 35$ °C (табл. 1.3).

Для візуалізації результатів розрахунків фізичних полів застосовується вільно відкритий програмний код **ParaView** [14] з використанням текстового файлу формату **Tecplot**, отриманого вище. Результати числового моделювання за тестом 2 з використанням розробленого програмного забезпечення наведено на рис. 1.3.

Табл. 1.3. Результати порівняння за тестом 3

	$t_c - t_0, ^\circ\text{C}$				
Час, год	1	3	5	7	10
ANSYS Mechanical APDL [13], 120 кроків за часом, вузлів 810, СЕ – 3509	326,13– 327,48	407,25– 409,81	415,22– 417,91	416,09– 418,81	416,20– 418,92
Mathcad , 120 кроків за часом, вузлів 1218, СЕ – 4804	326,05– 328,17	406,67– 411,35	414,61– 419,66	415,50– 420,58	415,61– 420,69
Похибка, %	0,024– 0,21	0,14–0,37	0,15–0,42	0,14–0,42	0,14–0,42

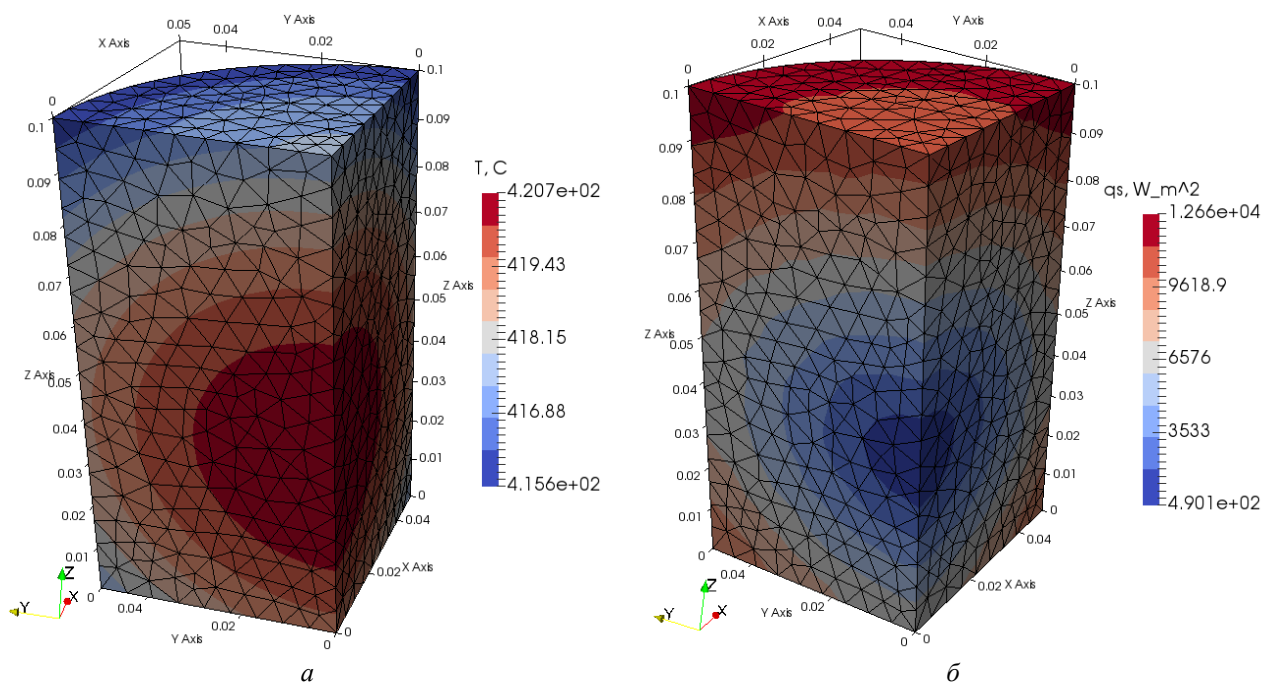


Рис. 1.3. Результати числового моделювання за тестом 3 на 10 год:
а – поле температури; б – поле результуючої густини теплового потоку

Аналіз порівняння результатів (табл. 1.1–1.3) показує, що дані моделювання за розробленим програмним забезпеченням (файл – **Trans_heat_cond_NL.xmcd**) збігаються з аналітичним та числовими розв’язками, що отримані з використанням програмного забезпечення **ANSYS Mechanical APDL** [13]. При цьому максимальне значення похибки визначення температури не перевищує 0,42–1,11 % залежно від умов задачі.

Запитання для самоконтролю

1. Опишіть оператор Гамільтона. За яких умов за допомогою цього оператора отримують **grad** і **div**?
2. Дайте поняття градієнта температури й густини теплового потоку.
3. Опишіть властивості ізотропного середовища.
4. Сформулюйте фізичний зміст температури й теплопровідності.
5. Наведіть фізичний зміст закону, на якому побудовано вивід рівняння теплопровідності.
6. Опишіть граничні умови рівняння теплопровідності.
7. Дайте поняття об'ємної густини джерела теплоти та опишіть природу його виникнення.
8. На підставі якого припущення спрощуються вирази для компонент матриць **SE**, пов'язаних з теплопровідністю, конвективним теплообміном та демпфіруванням?
9. Запишіть систему лінеаризованих рівнянь теплопровідності відносно вузлових невідомих $\delta \hat{T}$ та розшифруйте величини, що в них входять.
10. Наведіть критерій отримання числового розв'язку задачі теплопровідності.
11. Охарактеризуйте файл програми **Gmsh** для побудови тривимірної геометрії чверті циліндра (основні функції **Gmsh**).
12. Опишіть порядок дискретизації тривимірної фігури в програмі **Gmsh**, визначення номерів поверхонь для задання ГУ та глобальних номерів вузлів по лініях небезпечних перетинів конструкції для побудови епюр фізичних полів.
13. Наведіть перелік вихідних даних для розв'язання нелінійної нестационарної задачі теплопровідності.
14. Опишіть порядок задання граничних умов у файлі **Trans_heat_cond_NL.xmcd** під час розв'язання задачі теплопровідності.
15. Опишіть основні етапи розв'язання нелінійної нестационарної задачі теплопровідності та виконайте їх аналіз.
16. Опишіть структуру файла формату **Tecplot** для візуалізації результатів розрахунків з використанням тетраедричних **SE** на прикладі задачі теплопровідності.
17. Опишіть порядок візуалізації результатів розрахунків у програмі **ParaView**.

2. НЕЛІНІЙНА НЕСТАЦІОНАРНА ЗАДАЧА ТЕПЛО-ЕЛЕКТРОПРОВІДНОСТІ

2.1. Математична постановка задачі

Система рівнянь зв'язаної нелінійної нестационарної задачі тепло-електропровідності ізотропного середовища має вигляд [15]

$$\begin{cases} \frac{\partial h}{\partial \tau} = \nabla \cdot [\lambda(T) \nabla T(\mathbf{x})] + \chi(T) |\nabla U|^2 + q_v(T), \tau > 0; \mathbf{x} \in \Omega, \\ \nabla \cdot [\chi(T) \nabla U] = 0, \end{cases} \quad (2.1)$$

де $h(T) = \int_{T_{\text{ref}}}^T c_p(T) \rho(T) dT$ – об'ємна ентальпія, Дж/м³; T_{ref} – абсолютна температура відліку, К; c_p – масова ізобарна теплоємність, Дж/(кг·К); ρ – густина, кг/м³; T – абсолютна температура, К; τ – час, с; $\nabla = \frac{\partial}{\partial x_i}$, $i = 1, 2, 3$ – оператор Гамільтона, м⁻¹; x_i , $i = 1, 2, 3$ – декартові координати, м; (\cdot) – оператор скалярного добутку; λ – коефіцієнт теплопровідності, Вт/(м·К); \mathbf{x} – радіус-вектор декартової системи координат, м; χ – коефіцієнт електропровідності, См/м; U – електричний потенціал, В; q_v – об'ємна густина внутрішнього джерела теплоти неелектричної природи, Вт/м³; $\Omega \in R^3$ – тривимірна розрахункова область.

Початкові умови для (2.1) у момент часу $\tau = 0$ задаються тільки для нестационарного рівняння теплопровідності

$$T(\mathbf{x})|_{\Omega} = T_0, \quad (2.2)$$

де T_0 – початкова температура, К.

Граничні умови для рівняння теплопровідності з системи рівнянь (2.1) у момент часу $\tau > 0$ можуть включати ГУ трьох родів:

– I роду, або Дирихле, коли задана температура T_b на границі Γ_{T_I} частини поверхні Ω

$$T(\mathbf{x})|_{\Gamma_{T_I}} = T_b; \quad (2.3)$$

– II роду, або Неймана, коли задана нормальна складова вектора густини теплового потоку на границі $\Gamma_{T_{II}}$ частини поверхні Ω

$$q_n|_{\Gamma_{TII}} = \mathbf{n} \cdot [-\lambda(T)\nabla T], \quad (2.4)$$

де q_n – нормальна складова вектора густини теплового потоку $\mathbf{q} = -\lambda(T)\nabla T$, Вт/м²; \mathbf{n} – вектор зовнішньої нормалі до Ω ;

III роду, коли задані конвективні умови теплообміну на границі Γ_{TIII} частини поверхні Ω

$$\mathbf{n} \cdot [-\lambda(T)\nabla T]_{\Gamma_{TIII}} = \alpha(T)(T - T_p), \quad (2.5)$$

де α – коефіцієнт тепловіддачі, Вт/(м²·К); T_p – температура оточуючого середовища, К.

ГУ квазістаціонарного рівняння електропровідності (2.1) у момент часу $\tau > 0$ можуть включати ГУ двох типів:

– Дирихле, коли задано нульовий електричний потенціал на границі Γ_{UI} частини поверхні Ω

$$U(\mathbf{x})|_{\Gamma_{UI}} = 0; \quad (2.6)$$

– Неймана, коли задана нормальна складова вектора густини електричного струму на границі Γ_{UII} частини поверхні Ω

$$j_n|_{\Gamma_{UII}} = \mathbf{n} \cdot [-\chi(T)\nabla U], \quad (2.7)$$

де j_n – нормальна складова вектора густини електричного струму, А/м².

Система рівнянь (2.1)–(2.7) є повним формулюванням зв'язаної нелінійної нестационарної задачі тепло-електропровідності ізотропного середовища.

2.2. Методика числового розв'язання задачі

Розглянемо числову методику розв'язання задачі (2.1)–(2.7) побудовану на МСЕ [3–5]. При цьому для одержання системи дискретних рівнянь використаємо метод Гальоркіна. У результаті для вихідної задачі (2.1)–(2.7) після дискретизації Ω на скінченні елементи і за умови використанні першого порядку апроксимації $O(\Delta\tau)$ для скінченно-різницевого аналога похідної за часом [2, 6], отримуємо таку систему дискретних рівнянь МСЕ [15]:

$$\left\{ \begin{aligned} & \sum_{e=1}^M \left\{ -[C^{(e)}] \frac{\{\hat{h}^{(e)}\} - \{h^{(e)}\}}{\Delta\tau} - \left[[K_{\lambda}^{(e)}(\hat{T})] + [K_{\alpha}^{(e)}(\hat{T})] \right] \{\hat{T}^{(e)}\} + \right. \\ & \quad \left. + \{f_{q_j}^{(e)}(\hat{T})\} + \{f_{q_v}^{(e)}(\hat{T})\} + \{f_{\alpha}^{(e)}(\hat{T})\} - \{f_q^{(e)}\} \right\} = 0; \\ & \sum_{e=1}^M \left\{ [K_{\chi}^{(e)}(\hat{T})] \{\hat{U}^{(e)}\} + \{f_j^{(e)}\} \right\} = 0, \end{aligned} \right. \quad (2.8)$$

де (e) – індекс СЕ; M – кількість СЕ; $\{\hat{h}^{(e)}\}$, $\{h^{(e)}\}$ – вектори об'ємної ентальпії СЕ на верхньому та нижньому часових рівнях, відповідно, Дж/м³; $\{\hat{T}^{(e)}\}$, $\{T^{(e)}\}$ – вектори абсолютної температури СЕ на верхньому та нижньому часових рівнях, відповідно, К; $[C^{(e)}]$, $[K_{\lambda}^{(e)}(\hat{T})]$, $[K_{\alpha}^{(e)}(\hat{T})]$ – матриці СЕ, що пов'язані з демпфіруванням, теплопровідністю (Вт/(м³·К)) та зовнішнім конвективним теплообміном (Вт/(м³·К)), відповідно; $\{f_{q_j}^{(e)}(\hat{T})\} = \int_{V^{(e)}} \chi^{(e)}(\hat{T}) \|\nabla U^{(e)}\|^2 dV$, $\{f_{q_v}^{(e)}(\hat{T})\}$, $\{f_{\alpha}^{(e)}(\hat{T})\}$, $\{f_q^{(e)}\}$ – вектори навантаження СЕ, що пов'язані з внутрішнім джерелом теплоти за рахунок джоулевої теплоти та джерелом неелектричної природи, зовнішнім конвективним теплообміном на границі $\Gamma_{T\text{III}}$ частини поверхні Ω і густиною теплового потоку на границі $\Gamma_{T\text{II}}$ частини поверхні Ω , відповідно, Вт/м³; $V^{(e)}$ – об'єм СЕ, м³; $\{\nabla \hat{U}^{(e)}\} = [B] \{\hat{U}^{(e)}\}$ – градієнт електричного потенціалу СЕ, В/м; $\{\hat{U}^{(e)}\}$ – вектор електричного потенціалу СЕ на верхньому часовому рівні, В; $[K_{\chi}^{(e)}(\hat{T})]$ – матриця СЕ, що пов'язана з електропровідністю, См/м³; $\{f_j^{(e)}\}$ – вектор навантаження СЕ за рахунок заданої густини електричного струму на границі $\Gamma_{U\text{II}}$ частини поверхні Ω , А/м³.

Систему дискретних рівнянь (2.8) можна розв'язувати за допомогою побудови теплоелектричного СЕ з двома ступенями свободи (T і U) як це, наприклад, використовується для задач напружено-деформованого стану [3–5]. Основним недоліком такого способу є підвищені вимоги до обчислювальних ресурсів (зокрема до оперативної пам'яті). Тому з метою мінімізації цих вимог у даній роботі розглядається методика, що побудована на послідовному розв'язанні рівнянь теплопровідності та електропровідності.

Вирази у вигляді інтегральних співвідношень для визначення матриць $[C^{(e)}]$, $[K_{\lambda}^{(e)}]$, $[K_{\alpha}^{(e)}]$ і векторів $\{f_{q_v}^{(e)}\}$, $\{f_{\alpha}^{(e)}\}$, $\{f_q^{(e)}\}$ СЕ для лінійних задач теплопровідності можна знайти в [3–5]. Співвідношення для матриці $[K_{\chi}^{(e)}]$ і вектора $\{f_j^{(e)}\}$ рівняння електропровідності нескладно отримати за аналогією з теплопровідністю. Для нелінійної задачі (2.1)–(2.7) ці вирази за виключенням ма-

триці $[C^{(e)}]$ є залежними від температури і, тому в процесі її розв'язання ітераційними методами потребують перерахування на кожному кроці виконання ітерацій, що є неефективним особливо для нестационарних задач. Враховуючи ізотропність фізичних властивостей середовища, цього можна уникнути за допомогою деяких перетворень основних співвідношень СЕ. Наприклад, для матриці СЕ, пов'язаної з теплопровідністю, матимемо [1, 15]

$$[K_{\lambda}^{(e)}(\hat{T})] = \int_{V^{(e)}} \lambda(T) [B]^T [B] dV \approx \lambda(T_m^{(e)}) \int_{V^{(e)}} [B]^T [B] dV = \lambda(T_m^{(e)}) [k_{\lambda}^{(e)}], \quad (2.9)$$

для матриці СЕ, пов'язаної із зовнішнім конвективним теплообміном [1, 15]

$$[K_{\alpha}^{(e)}(\hat{T})] = \int_{S^{(e)}} \alpha(T) [N]^T [N] dS \approx \alpha(T_m^{(e)}) \int_{S^{(e)}} [N]^T [N] dS = \alpha(T_m^{(e)}) [k_{\alpha}^{(e)}], \quad (2.10)$$

для матриці СЕ, пов'язаної з електропровідністю [15]

$$[K_{\chi}^{(e)}(\hat{T})] = \int_{V^{(e)}} \chi(T) [B]^T [B] dV \approx \chi(T_m^{(e)}) \int_{V^{(e)}} [B]^T [B] dV = \chi(T_m^{(e)}) [k_{\chi}^{(e)}], \quad (2.11)$$

де $V^{(e)}$ – об'єм СЕ, m^3 ; $S^{(e)}$ – поверхня грані СЕ, m^2 ; $[N]$ – матриця-рядок кое-

фіцієнтів форми СЕ; $[B] = \nabla[N]$ – матриця градієнтів СЕ; $T_m^{(e)} = \frac{\sum_{i=1}^M T_i}{M}$ – середня температура СЕ; $[k_{\lambda}^{(e)}] = [k_{\chi}^{(e)}] = \int_{V^{(e)}} [B]^T [B] dV$, $[k_{\alpha}^{(e)}] = \int_{S^{(e)}} [N]^T [N] dS$.

Матриця демпфірування не перетворюється, оскільки за рахунок використання h замість T у (2.8), вона стає незалежною від температури і виражається таким співвідношенням [15]

$$[C^{(e)}(\hat{T})] = \int_{V^{(e)}} [N]^T [N] dV = [c^{(e)}], \quad (2.12)$$

де $[c^{(e)}] = \int_{V^{(e)}} [N]^T [N] dV$.

Аналогічні перетворення також нескладно виконати і для векторів навантаження СЕ $\{f_{q_v}^{(e)}(\hat{T})\}$, $\{f_{\alpha}^{(e)}(\hat{T})\}$, $\{f_q^{(e)}\}$, $\{f_j^{(e)}\}$. Тепер матриці $[k_{\lambda}^{(e)}]$, $[k_{\alpha}^{(e)}]$, $[c^{(e)}]$,

$[k_\chi^{(e)}]$, та вектори $\{f_{q_v}^{(e)}\}, \{f_\alpha^{(e)}\}, \{f_j^{(e)}\}$ СЕ вимагають тільки одноразового обчислення на початку ітераційного циклу розв'язання задачі. У результаті виконаних перетворень (2.9)–(2.12) система дискретних рівнянь МСЕ (2.8) набуває вигляду [15]:

$$\left\{ \begin{aligned} & \sum_{e=1}^M \left\{ -[c^{(e)}] \frac{\{\hat{h}^{(e)}\} - \{h^{(e)}\}}{\Delta \tau} - ([k_\lambda^{(e)}] \chi(\hat{T}_m^{(e)}) + [k_\alpha^{(e)}] \alpha(\hat{T}_m^{(e)})) \{\hat{T}^{(e)}\} + \right. \\ & \left. + \{f_{q_j}^{(e)}\} + \{f_{q_v}^{(e)}\} q_v(\hat{T}_m^{(e)}) + \{f_\alpha^{(e)}\} \alpha(\hat{T}_m^{(e)}) T_p - \{f_q^{(e)}\} q_n \right\} = 0; \\ & \sum_{e=1}^M \left\{ [k_\chi^{(e)}] \chi(\hat{T}_m^{(e)}) \{\hat{U}^{(e)}\} + \{f_j^{(e)}\} j_n \right\} = 0, \end{aligned} \right. \quad (2.13)$$

де q_n – нормальна густина теплового потоку на грані СЕ, Вт/м²; j_n – нормальна густина сили електричного струму на грані СЕ, А/м²; $\{f_{q_v}^{(e)}\} = \int_{V^{(e)}} [N]^T dV$;
 $\{f_\alpha^{(e)}\} = \{f_q^{(e)}\} = \{f_j^{(e)}\} = \int_{S^{(e)}} [N]^T dS$.

Після часткової лінеаризації за методом Ньютона [6] система дискретних рівнянь (13) набуває вигляду:

– для рівняння теплопровідності [1, 15]

$$\begin{aligned} & \sum_{e=1}^M \left\{ [k_\lambda^{(e)}] \left[\frac{\partial \lambda^{(e)}(\hat{T}^k)}{\partial T} \hat{T}^k + \lambda^{(e)}(\hat{T}^k) \right] + [k_\alpha^{(e)}] \left[\frac{\partial \alpha^{(e)}(\hat{T}^k)}{\partial T} \hat{T}^k + \alpha^{(e)}(\hat{T}^k) \right] + \right. \\ & \left. + [c^{(e)}] \frac{c_p^{(e)}(\hat{T}^k) \rho^{(e)}(\hat{T}^k)}{\Delta \tau} - \{f_\alpha^{(e)}\} \left\{ \frac{\partial \alpha^{(e)}(\hat{T}^k)}{\partial T} \right\}^T T_p - \{f_{q_v}^{(e)}\} \left\{ \frac{\partial q_v^{(e)}(\hat{T}^k)}{\partial T} \right\}^T \right\} \times \\ & \times \{\delta \hat{T}^{k+1}\} = \sum_{e=1}^M \{f_\lambda^{(e)}\} \end{aligned} \quad (2.14)$$

– для рівняння електропровідності [15]

$$\sum_{e=1}^M [k_\chi^{(e)}] \chi(\hat{T}^k) \{\delta \hat{U}^{k+1}\} = \sum_{e=1}^M \{f_\chi^{(e)}\}, \quad (2.15)$$

де $\{f_\lambda^{(e)}\} = -[c^{(e)}] \frac{\{\hat{h}^{(e)}(\hat{T}^k)\} - \{h^{(e)}(T^k)\}}{\Delta \tau} - ([k_\lambda^{(e)}] \chi(\hat{T}^k) + [k_\alpha^{(e)}] \alpha(\hat{T}^k)) \{\hat{T}^k\} +$

$+ \{f_{q_j}^{(e)}\} + \{f_{q_v}^{(e)}\} q_v (\hat{T}_m^k) + \{f_{\alpha}^{(e)}\} \alpha (\hat{T}_m^k) T_p - \{f_q^{(e)}\} q_n$ – вільний член системи дискретних рівнянь (2.14); $\{\delta \hat{T}^{k+1}\}$ – вектор нев'язки за температурою; k – номер ітерації на кожному кроці інтегрування за часом; $\{f_{\chi}^{(e)}\} = \sum_{e=1}^M \{k_{\chi}^{(e)}\} \chi (\hat{T}_m^k) (\hat{U}^{(e)}) + \{f_j^{(e)}\} j_n$ – вільний член системи дискретних рівнянь (2.15); $\{\delta \hat{U}^{k+1}\}$ – вектор неув'язки за електричним потенціалом.

Лінеаризація (2.15) є необов'язковою, але її виконання пояснюється отриманням однакової форми запису систем дискретних рівнянь.

Системи лінеаризованих рівнянь (2.14) і (2.15) можна також переписати відносно вузлових невідомих $\delta \hat{T}$ і $\delta \hat{U}$, відповідно. Наприклад, у разі нелінійності, що викликана температурною залежністю $c_p, \rho, \lambda, \alpha, \chi$, матимемо такі системи лінеаризованих рівнянь:

– для рівняння теплопровідності [1, 15]

$$[A_{ij}^{\lambda}] \{\delta T_j\} = \{B_i^{\lambda}\}, \quad i, j = \overline{1, N}, \quad (2.16)$$

де

$[A_{ij}^{\lambda}] = [k_{\lambda ij}] \left[\frac{\partial \lambda(\hat{T}_j^k)}{\partial T} \hat{T}_j^k + \lambda(\hat{T}_j^k) \right] + [k_{\alpha ij}] \left[\frac{\partial \alpha(\hat{T}_j^k)}{\partial T} \hat{T}_j^k + \alpha(\hat{T}_j^k) \right] + [c_{ij}] \frac{c_p(\hat{T}_j^k) \rho(\hat{T}_j^k)}{\Delta \tau} - \{f_{\alpha i}\} \left[\frac{\partial \alpha(\hat{T}_j^k)}{\partial T} \right] T_p$ – матриця системи, що відповідає глобальним номерам вузлів; $\{B_i^{\lambda}\} = \sum_{e=1}^M \left[-[c^{(e)}] \frac{\{h^{(e)}(T^k)\} - \{h^{(e)}(T)\}}{\Delta \tau} - ([k_{\lambda}^{(e)}] \lambda(\hat{T}^k) + [k_{\alpha}^{(e)}] \alpha(\hat{T}^k)) (\hat{T}^k) + \{f_{q_j}^{(e)}\} + \{f_{q_v}^{(e)}\} q_v + \{f_{\alpha}^{(e)}\} \alpha(\hat{T}_m^k) T_p - \{f_q^{(e)}\} q_n \right]$ – вектор вільних членів відносно глобальних номерам вузлів;

– для рівняння електропровідності [15]

$$[A_{ij}^{\chi}] \{\delta U_j\} = \{B_i^{\chi}\}, \quad i, j = \overline{1, N}, \quad (2.17)$$

де $[A_{ij}^{\chi}] = [k_{\chi ij}] \chi(\hat{T}_j^k)$ – матриця системи, що відповідає глобальним номерам вузлів; $\{B_i^{\chi}\} = \sum_{e=1}^M \{k_{\chi}^{(e)}\} \chi(\hat{T}_m^k) (\hat{U}^{(e)}) + \{f_j^{(e)}\} j_n$ – вектор вільних членів відносно глобальних номерам вузлів.

Матриці $[A_{ij}^\lambda]$ і $[A_{ij}^\chi]$ є розрідженими, тому для їх формування та подальшого розв'язання систем лінійних алгебричних рівнянь (2.16) і (2.17) зазвичай використовується, наприклад, їхня стрічкова форма [7, 8], що також значно мінімізує вимоги до обчислювальних ресурсів.

Системи лінеаризованих рівнянь (2.16) і (2.17) на кожному кроці ітерацій розв'язуються послідовно відносно $\{\hat{T}_j^{k+1}\}$ і $\{\hat{U}_j^{k+1}\}$, відповідно, а шукана температура і потенціал у вузлах розрахункової сітки визначається за формулами [15]:

$$\begin{cases} \{\hat{T}_i^{k+1}\} = \{\hat{T}_i^k\} + \{\delta\hat{T}_i^{k+1}\}, & i = \overline{1, N}; \\ \{\hat{U}_i^{k+1}\} = \{\hat{U}_i^k\} + \{\delta\hat{U}_i^{k+1}\}, & i = \overline{1, N}, \end{cases} \quad (2.18)$$

де N – кількість вузлів у розрахунковій області.

При цьому система рівнянь (2.17) для електропровідності розв'язується першою в ітераційному циклі розв'язання задачі тепло-електропровідності.

Критерієм отримання числового розв'язку вихідної задачі на кожному часовому кроці є виконання умови [1, 15]

$$|\delta\hat{T}_i^{k+1}| \leq \varepsilon_T, i = \overline{1, N}, \quad (2.19)$$

де ε_T – задана точність розрахунку поля температури, К.

При цьому точність визначення електричного потенціалу, яка є не гіршою за температуру, встановлюється автоматично.

2.3. Програмна реалізація числової методики та верифікація

Програмна реалізація числової методики розв'язання теплоелектричної задачі так само як і задачі теплопровідності (див. підрозділ 2.2) виконана на мові програмування системи **Mathcad** [12]. Оцінка точності розрахунків проведена за допомогою порівняння з точними (аналітичними) та числовими розв'язками задач, отриманими за допомогою іншого програмного забезпечення. Як геометричний об'єкт обрано циліндр за різних комбінацій задання граничних умов конвективного типу для рівняння теплопровідності та умов Дирихле та Неймана для рівняння електропровідності за умов стаціонарного та нестаціонарного розподілу полів температури, для яких існують точні розв'язки [11] у разі лінійних задач.

Аналогічно задачі теплопровідності числова модель задачі тепло-електропровідності також являє собою четверту частину циліндра, яку побу-

довано за допомогою спеціального **geo**-файла у програмі **Gmsh** [9] (див. рис. 1.1) та виконано її дискретизацію на тетраедні СЕ – файл **Cyl.msh**.

Для розв’язання нелінійної нестационарної задачі тепло-електропровідності використовується файл **Mathcad** [12] **Trans_heat_elec_cond_NL.xmcd** (додаток А.2), який є програмним кодом і який розроблено згідно з математичною постановкою задачі (див. підрозділ 2.1) та методики її числового розв’язання (див. підрозділ 2.2). Для того, щоб скористатися цим кодом, спочатку треба виконати деякі підготовчі операції. Для правильного зчитування даних в програмі **Mathcad** у перший рядок файлу дискретизації **Cyl.msh** необхідно додати такий рядок:

11 22 33 44 55 66 77 88 99 100

У програмі **Gmsh** також необхідно визначити номери поверхонь для задання граничних умов та глобальні номери вузлів по лініях небезпечних перетинів для побудови відповідних епюр, як це показано в [5].

Після закінчення виконання вказаних операцій файл **Trans_heat_elec_cond_NL.xmcd** завантажується в систему **Mathcad** і розпочинається робота з адаптації програмного коду для розв’язання нестационарної задачі тепло-електропровідності циліндра.

Спершу підключається відредагований файл **Cyl.msh** у разі, якщо він автоматично не підключився, задаються фізичні властивості матеріалу за даними тестових прикладів, що наведені нижче за текстом, початкова температура, параметри граничних умов для рівнянь теплопровідності й електропровідності, крок інтегрування за часом та їх кількість. Далі за номерами поверхонь для завдання ГУ визначаються параметри дискретизації цих поверхонь: номери трикутних елементів та номери вузлів, що їм відповідають, та задаються ГУ.

Розв’язання нестационарної задачі тепло-електропровідності виконується шляхом послідовного перегляду файла **Trans_heat_elec_cond_NL.xmcd** до місця запису результатів розрахунків фізичних полів. При цьому необхідно з’ясувати основні етапи розв’язання задачі: від формування глобальної матриці і вільного члена СЛАР та її розв’язання відносно прирощення температури та електричного потенціалу на кожному кроці інтегрування за часом до розрахунку компонент вектора густини теплового потоку в СЕ та глобальних вузлах, розрахунку результуючої густини теплового потоку в глобальних вузлах, запису результатів розрахунків фізичних полів у файли **...\Result_1.dat** і **...\NNodes_Elements.dat** аналогічно [5]. Формування текстового файлу формату **Tecplot** здійснюється так само, як це описано в [5]. Епюри фізичних полів по лініях у небезпечних перетинах конструкції будуються за визна-

ченими у програмі **Gmsh** номерами глобальних вузлів після їх запису у відповідний вектор у коді **Trans_heat_cond_NL.xmcd** [5].

Тестування розробленого у середовищі **Mathcad** [12] програмного забезпечення для розв'язання зв'язаної нестационарної задачі тепло-електропровідності (2.1)–(2.7) ізотропного середовища проведено за декількома тестами, що включають лінійні та нелінійні задачі.

Тест 1. Стаціонарна лінійна задача тепло-електропровідності циліндра радіусом 0,05 м та висотою 0,1 м теплопровідністю 12 Вт/(м·К), електропровідністю 500 (Ом·м)⁻¹ за граничних умов для I, II і III роду на торцях та бічній стороні для рівнянь електропровідності і теплопровідності, відповідно: нижній торець $U = 0$ В; верхній торець $j_n = 2500/5000/10000$ А/м²; бічна сторона $\alpha = 15$ Вт/(м²·К), $t_{p1} = 35$ °С (табл. 2.1).

Табл. 2.1. Результати порівняння за тестом 1

Тип розв'язку	$t_c - t_0$, $j_n = 2500$ А/м ²	$t_c - t_0$, $j_n = 5000$ А/м ²	$t_c - t_0$, $j_n = 10000$ А/м ²
Точний розв'язок [11]	55,827–56,478	118,309–120,912	368,235–378,649
Mathcad , вузлів 1218, СЕ – 4804	55,795–56,451	118,18–120,804	367,721–378,214
q_v , Вт/м ³	$1,25 \cdot 10^4$	$5,0 \cdot 10^4$	$2,0 \cdot 10^5$
Похибка, %	0,068–0,058	0,11–0,09	0,14–0,11

Тест 2. Стаціонарна нелінійна задача тепло-електропровідності циліндра радіусом 0,05 м та висотою 0,1 м теплопровідністю $\lambda(t) = 159,218e^{-1,116 \times 10^{-3}t}$ Вт/(м·К), електропровідністю $\chi(t) = 73086,2 - 7,032 \cdot 10^{-9}t^4 + 5,188 \cdot 10^{-5}t^3 - 1,381 \cdot 10^{-1}t^2 + 136,36t$ См/м за граничних умов для I, II і III роду на торцях та бічній стороні для рівнянь електропровідності і теплопровідності, відповідно: нижній торець $U = 0$ В; верхній торець $j_n = 0,5 \cdot 10^5/0,1 \cdot 10^6/0,2 \cdot 10^6$ А/м²; бічна сторона $\alpha = 15$ Вт/(м²·К), $t_{p1} = 35$ °С (табл. 2.2).

Тест 3. Нестационарна нелінійна задача тепло-електропровідності циліндра радіусом 0,05 м та висотою 0,1 м теплопровідністю $\lambda(t) = 159,218e^{-1,116 \times 10^{-3}t}$ Вт/(м·К), масовою ізобарною теплоємністю $c_p(t) = 712,2 + 2,933 \times 10^{-7}t^3 - 1,444 \times 10^{-3}t^2 + 2,406t$ Дж/(кг·К) і густиною $\rho(t) = 1853 - 5,453 \times 10^{-5}t^5 - 0,127t$, електропровідністю $\chi(t) = 73086,2 - 7,032 \cdot 10^{-9}t^4 + 5,188 \cdot 10^{-5}t^3 - 1,381 \cdot 10^{-1}t^2 + 136,36t$ См/м за граничних умов для I, II і III родів на торцях та бічній стороні для рівнянь електропровідності і теплопровідності, відповідно: нижній торець $U = 0$ В;

верхній торець $j_n = 10^5$ А/м²; торці та бічна сторона $\alpha = 15$ Вт/(м²·К), $t_{p1} = 35$ °С. Початкова температура $t_0 = 35$ °С. (табл. 2.3).

Табл. 2.2. Результати порівняння за тестом 2

Тип розв'язку	$j_n = 0,5 \cdot 10^5$ А/м ²		$j_n = 0,1 \cdot 10^6$ А/м ²		$j_n = 0,2 \cdot 10^6$ А/м ²	
	$t_c - t_0$, °С	U_{\max} , В	$t_c - t_0$, °С	U_{\max} , В	$t_c - t_0$, °С	U_{\max} , В
ANSYS Mechanical APDL [13], вузлів 810, СЕ – 3509	68,91– 69,08	0,0611	156,69– 157,37	0,1096	436,28– 439,35	0,1811
Mathcad , вузлів 1218, СЕ – 4804	68,85– 69,04	0,0611	156,42– 157,25	0,1096	435,70– 441,78	0,1813
Похибка, %	0,087– 0,058	0,0	0,17– 0,076	0,0	0,13–0,55	0,11

Табл. 2.3. Результати порівняння за тестом 3

	$(t_c - t_0)/U_{\max}$, °С/В				
Час, год	0,5	1	2	3	4
ANSYS Mechanical APDL [13], 120 кроків за часом, вузлів 810, СЕ – 3509	(115,96– 116,39)/ 0,1148	(141,22– 141,80)/ 0,1114	(154,17– 154,84)/ 0,1098	(156,16– 156,84)/ 0,1096	(156,47– 157,15)/ 0,1096
Mathcad – MCE , 120 кроків за часом, вузлів 1218, СЕ – 4804	(115,39– 115,89)/ 0,1148	(140,83– 141,52)/ 0,1115	(153,99– 154,79)/ 0,1099	(156,03– 156,85)/ 0,1096	(156,35– 157,18)/ 0,1096
Похибка, %	(0,49– 0,43)/0,0	(0,28– 0,19)/0,0	(0,12–0,032)/ 0,091	(0,083– 0,006)/0,0	(0,077– 0,019)/0,0

Для візуалізації результатів розрахунків фізичних полів застосовується вільно відкритий програмний код **ParaView** [14] з використанням текстового файлу формату **Tecplot**, отриманого вище. Результати числового моделювання за тестом 3 з використанням розробленого програмного забезпечення наведено на рис. 2.1.

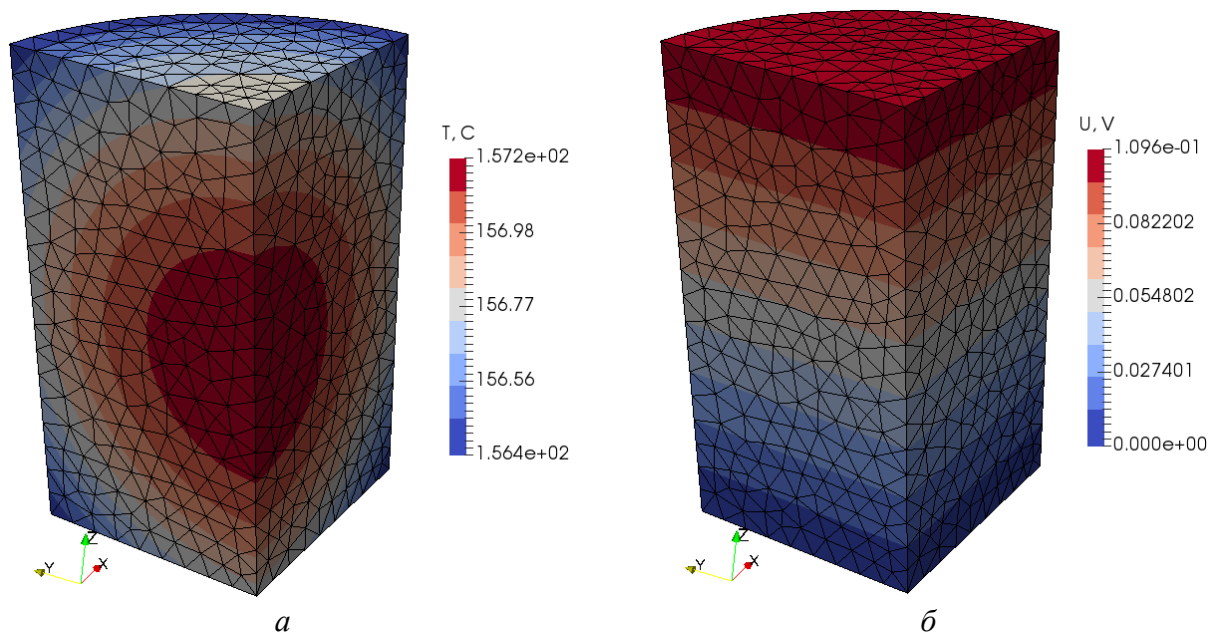


Рис. 2.1. Результати чисового моделювання теплоелектричних полів чверті циліндра за тестом 3 на 4 год: *а* – поле температури; *б* – поле електричного потенціалу

Аналіз порівняння результатів показує, що дані моделювання за розробленим програмним забезпеченням (файл – **Trans_heat_cond_NL.xmcd**) збігаються з аналітичними та числовими розв'язками, що отримані з використанням програмного забезпечення **ANSYS Mechanical APDL** [13]. При цьому максимальне значення похибки визначення температури й електричного потенціалу не перевищує 0,49–0,55 % залежно від умов задачі.

Запитання для самоконтролю

1. Запишіть і сформулюйте фізичний зміст законів Фур'є та Ома.
2. Дайте поняття градієнта температури й електричного потенціалу.
3. Сформулюйте фізичний зміст теплоємності та коефіцієнтів теплопровідності й електропровідності.
4. Опишіть граничні умови рівнянь теплопровідності та електропровідності.
5. Що собою являють функції форми скінченного елемента і для чого вони використовуються?
6. У чому полягає сутність методу Гальоркіна під час побудови системи дискретних МСЕ?
7. На підставі яких уявлень спрощуються вирази для компонент матриць СЕ, пов'язаних з теплопровідністю, конвективним теплообміном, демпфіруванням та електропровідністю?
8. Запишіть системи лінеаризованих рівнянь тепло-електропровідності

відносно вузлових невідомих $\delta\hat{T}$ і $\delta\hat{U}$ та розшифруйте величини, що в них входять.

9. Запишіть критерій отримання числового розв'язку теплоелектричної задачі. Чим від відрізняється від задачі теплопровідності?

10. Опишіть оператори та функції, що входять у **geo**-файл програми **Gmsh** для побудови тривимірної геометрії чверті циліндра (основні функції **Gmsh**).

11. Яким чином виконується дискретизація тривимірної фігури у програмі **Gmsh** та здійснюється визначення номерів поверхонь для задання ГУ?

12. Наведіть перелік вихідних даних для розв'язання нелінійної нестационарної задачі тепло-електропровідності.

13. Опишіть порядок задання граничних умов у файлі **Trans_heat_elec_cond_NL.xmcd**.

14. Опишіть основні етапи розв'язання нелінійної нестационарної задачі тепло-електропровідності.

15. Охарактеризуйте структуру файла формату **Tecplot** для візуалізації результатів розрахунків з використанням тетраедричних СЕ на прикладі теплоелектричної задачі.

16. Наведіть порядок візуалізації результатів розрахунків у програмі **ParaView**.

3. ЗАДАЧА ПРУЖНО-ПЛАСТИЧНОЇ ПОВЕДІНКИ ІЗОТРОПНОГО МАТЕРІАЛУ

3.1. Математична постановка задачі

Згідно з інкрементною теорією пластичності математична модель незалежної від швидкості пружно-пластичної поведінки ізотропного матеріалу включає таку систему рівнянь, записаних через прирошення фізичних величин [16–19]: рівняння рівноваги, узагальнений закон Гука та геометричне рівняння:

$$\begin{cases} \nabla \cdot \dot{\hat{\sigma}} + \rho \dot{\hat{\mathbf{b}}} = 0; \\ \dot{\hat{\sigma}} = \frac{E}{1+\nu} \left(\dot{\hat{\varepsilon}} + \frac{\nu}{1-2\nu} \hat{\mathbf{I}} \text{tr}(\dot{\hat{\varepsilon}}) \right) - \dot{\hat{\sigma}}^0; \\ \dot{\hat{\varepsilon}} = \frac{1}{2} (\nabla \dot{\mathbf{u}} + \dot{\mathbf{u}} \nabla) = \dot{\hat{\varepsilon}}^{el} + \dot{\hat{\varepsilon}}^{pl}, \end{cases} \quad (3.1)$$

де ∇ – оператор Гамільтона, м^{-1} ; $\dot{\hat{\sigma}}$ – симетричний тензор прирошення напружень другого рангу, Па; ρ – густина, $\text{кг}/\text{м}^3$; $\dot{\hat{\mathbf{b}}}$ – вектор прирошення масових сил, $\text{Н}/\text{кг}$; E – модуль пружності під час одновісного розтягу (стискання), Па; ν – коефіцієнт Пуассона; $\dot{\hat{\varepsilon}}$ – симетричний тензор прирошення повних деформацій другого рангу; $\hat{\mathbf{I}}$ – одиничний тензор другого рангу; $\text{tr}(\)$ – оператор сліду тензора; $\dot{\hat{\sigma}}^0$ – тензор прирошення початкових напружень, Па; $\dot{\hat{\varepsilon}}^{el}, \dot{\hat{\varepsilon}}^{pl}$ – пружна і пластична складові тензора прирошення повних деформацій $\dot{\hat{\varepsilon}}$, відповідно; $\dot{\mathbf{u}}$ – вектор прирошення переміщень, м. Тут знак \wedge над тензором без цифри означає його приналежність до другого рангу.

У разі ізотропного зміцнення умова плинності матеріалу набуває вигляду [16–19]

$$F(\hat{\sigma}, \varepsilon_{eq}^{pl}) = \sigma_{eq} - \sigma_y(\varepsilon_{eq}^{pl}), \quad (3.2)$$

де F – функція поверхні плинності матеріалу; $\sigma_{eq} = \sqrt{\frac{3}{2} \hat{\mathbf{s}} : \hat{\mathbf{s}}}$ – еквівалентне напруження за Мізесом, Па [13]; $\hat{\mathbf{s}} = \hat{\sigma} - \frac{1}{3} \text{tr}(\hat{\sigma}) \hat{\mathbf{I}}$ – тензор девіаторних напружень другого рангу, Па; $\hat{\mathbf{I}}$ – одиничний тензор другого рангу; $\sigma_y(\varepsilon_{eq}^{pl}) = \sigma_{y0} + h \varepsilon_{eq}^{pl}$ – границя плинності матеріалу з врахуванням ізотропного

зміцнення за лінійним законом, Па; $\varepsilon_{eq}^{pl} = \sqrt{\frac{2}{3} \hat{\mathbf{e}}^{pl} : \hat{\mathbf{e}}^{pl}}$ – еквівалентна пластична деформація за Мізесом; $\hat{\mathbf{e}}^{pl} = \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^{pl} - \frac{1}{3} \text{tr}(\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^{pl}) \hat{\mathbf{I}}$ – тензор девіаторних пластичних деформацій другого рангу; σ_{y0} – початкове значення границі плинності матеріалу, Па; h – модуль зміцнення, Па; $(:)$ – оператор подвійного скалярного множення.

Початкові умови для (3.1), (3.2)

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}}^0 = 0. \quad (3.3)$$

Граничні умови для (3.1), (3.2):

– вектор переміщення

$$\mathbf{u}|_{S_u} = 0, \quad (3.4)$$

де S_u – поверхня (або точка поверхні), на якій задані компоненти переміщення, м²;

– симетрія

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{u}|_{S_{su}} = 0, \quad (3.5)$$

де \mathbf{n} – вектор зовнішньої нормалі до поверхні тіла; S_{su} – поверхня симетрії тіла, м²;

– зовнішній тиск

$$(\hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{n}|_{S_p} = p, \quad (3.6)$$

де p – зовнішній тиск, заданий на поверхні тіла S_p , Па.

Система рівнянь (3.1)–(3.6) є повним формулюванням пружно-пластичної поведінки ізотропного матеріалу з врахуванням ізотропного зміцнення.

3.2. Методика числового розв’язання задачі, побудована на неявному алгоритмі зворотного відображення

Розглянемо теоретичні основи неявного алгоритму зворотного відображення (Return-Mapping Algorithms (RMA)) [16–18, 20] на прикладі

розв'язання задачі пружно-пластичної поведінки ізотропного матеріалу. Пружні напруження у разі виникнення пружно-пластичних деформацій в матеріалі визначаються рівнянням [20, 22]

$$\hat{\sigma} = \hat{\mathbf{C}}^4 : (\hat{\epsilon}^{tr} - \hat{\epsilon}^{pl}), \quad (3.7)$$

де $\hat{\mathbf{C}}^4$ – тензор четвёртого рангу пружних констант матеріалу, Па; $\hat{\epsilon}^{tr}$ – тензор пробних (повних) деформацій другого рангу, що визначається в наближенні пружного середовища; $\hat{\epsilon}^{pl} = \sum_{i=1}^N (\Delta \hat{\epsilon}^{pl})_i$ – тензор пластичних деформацій другого рангу; $\Delta \hat{\epsilon}^{pl}$ – приращення пластичної деформації на i -у кроці навантаження; N – кількість кроків навантаження.

У разі асоціативного закону пластичної течії приращення пластичних деформацій визначається співвідношенням [20, 22]

$$\Delta \hat{\epsilon}^{pl} = \Delta \lambda \hat{\mathbf{m}}, \quad (3.8)$$

де $\Delta \lambda$ – скалярний асоціативний множник (коефіцієнт пластичності), який визначається за формулою

$$\Delta \lambda = \frac{\hat{\mathbf{m}} : \hat{\mathbf{C}}^4 : \hat{\epsilon}^{tr}}{\hat{\mathbf{m}} : \hat{\mathbf{C}}^4 : \hat{\mathbf{m}}^T + h}, \quad (3.9)$$

де $\hat{\mathbf{m}} = \frac{\partial F}{\partial \hat{\sigma}} = \frac{3}{2} \frac{\hat{\mathbf{s}}}{\sqrt{\frac{3}{2} \hat{\mathbf{s}} : \hat{\mathbf{s}}}}$ – похідна від функції пластичності (3.2) за тензором на-

пруження.

Використовуючи обернений метод Ейлера, рівняння (3.7) з врахуванням (3.8) і (3.9) для $k+1$ кроку навантаження нескладно перетворити до вигляду [20, 22]

$$\hat{\sigma}^{k+1} = \hat{\sigma}^{tr} - \Delta \lambda^{k+1} \hat{\mathbf{C}}^4 : \hat{\mathbf{m}}(\hat{\sigma}^{k+1}), \quad (3.10)$$

де $\hat{\sigma}^{k+1}$ – тензор пружних напружень на $k+1$ кроці навантаження, Па; $\hat{\sigma}^{tr} = \hat{\mathbf{C}}^4 : \hat{\epsilon}^{tr}$ – тензор пробних напружень, що визначається у наближенні пруж-

ного тіла, Па; $\hat{\mathbf{C}}^4 : \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^{pl} = \Delta\lambda^{k+1} \hat{\mathbf{C}}^4 : \hat{\mathbf{m}}(\hat{\boldsymbol{\sigma}}^{k+1})$ – початкові напруження, спричинені пластичною течією матеріалу, Па.

Формула (3.10) описує відображення тензора пробних напружень $\hat{\boldsymbol{\sigma}}^{tr}$ у напрямку поверхні плинності F . Тому цей метод розв’язання задачі пружно-пластичності отримав назву алгоритму зворотного відображення [17].

Система рівнянь (3.10) з урахуванням симетрії тензора напружень має сім невідомих, тобто шість незалежних компонент $\hat{\boldsymbol{\sigma}}^{tr}$ та коефіцієнт пластичності $\Delta\lambda$. У зв’язку з цим для замикання системи рівнянь (3.10) її необхідно доповнити скалярним рівнянням (2.2) вигляду [20]

$$F(\hat{\boldsymbol{\sigma}}^{k+1}, \Delta\lambda) = 0. \quad (3.11)$$

Рівняння (3.11) забезпечує виконання умови плинності в кінці кожної k -ї стадії навантаження.

Для застосування методу Ньютона [6] нелінійну систему рівнянь (3.10), (3.11) необхідно переписати у форматі відхилень (3.12). При цьому для представлення тензорів $\hat{\boldsymbol{\sigma}}^{k+1}$, $\hat{\boldsymbol{\sigma}}^{tr}$ і $\hat{\mathbf{m}}$ у вигляді векторів потрібно виконати перехід на шестивимірний простір з врахуванням їх симетрії. Це надає можливість замінити тензори другого рангу $\hat{\boldsymbol{\sigma}}^{k+1}$, $\hat{\boldsymbol{\sigma}}^{tr}$ та $\hat{\mathbf{m}}$ на відповідні вектори $\boldsymbol{\sigma}^{k+1}$, $\boldsymbol{\sigma}^{tr}$ та \mathbf{m} з шістьма компонентами, а замість тензора четвертого рангу $\hat{\mathbf{C}}^4$ використовувати тензор другого рангу пружних констант $\hat{\mathbf{D}}^{el}$ розмірністю шість [20, 22]:

$$\begin{cases} \mathbf{r}_{\boldsymbol{\sigma}} = \boldsymbol{\sigma}^{k+1} - \boldsymbol{\sigma}^{tr} + \Delta\lambda^{k+1} \hat{\mathbf{D}}^{el} \cdot \mathbf{m}(\boldsymbol{\sigma}^{k+1}), \\ r_F = F(\boldsymbol{\sigma}^{k+1}, \Delta\lambda^{k+1}) \end{cases}, \quad (3.12)$$

Для розв’язання системи нелінійних рівнянь (3.12) використовується метод Ньютона (3.13) або лінеаризація за методом Ньютона (3.14), ітераційні процедури яких відповідно записуються таким чином [20, 22]:

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma}_{j+1}^{k+1} \\ \Delta\lambda_{j+1}^{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma}_j^{k+1} \\ \Delta\lambda_j^{k+1} \end{pmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{r}_{\boldsymbol{\sigma}}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} & \frac{\partial \mathbf{r}_{\boldsymbol{\sigma}}}{\partial \Delta\lambda} \\ \frac{\partial r_F}{\partial \boldsymbol{\sigma}} & \frac{\partial r_F}{\partial \Delta\lambda} \end{bmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{r}_{\boldsymbol{\sigma}}^j \\ \mathbf{r}_F^j \end{pmatrix}, \quad (3.13)$$

або

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{r}_\sigma}{\partial \sigma} & \frac{\partial \mathbf{r}_\sigma}{\partial \Delta \lambda} \\ \frac{\partial r_F}{\partial \sigma} & \frac{\partial r_F}{\partial \Delta \lambda} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \delta \sigma_j^{k+1} \\ \delta \Delta \lambda_j^{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{r}_\sigma^j \\ r_F^j \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \sigma_{j+1}^{k+1} \\ \Delta \lambda_{j+1}^{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_j^{k+1} \\ \Delta \lambda_j^{k+1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \delta \sigma_j^{k+1} \\ \delta \Delta \lambda_j^{k+1} \end{pmatrix}, \quad (3.14)$$

де $\frac{\partial \mathbf{r}_\sigma}{\partial \sigma} = \mathbf{I} + \Delta \lambda_j^{k+1} \hat{\mathbf{D}}^{el} \cdot \frac{\partial \mathbf{m}(\sigma_j^{k+1})}{\partial \sigma}$; \mathbf{I} – одиничний тензор другого рангу;

$\frac{\partial \mathbf{r}_\sigma}{\partial \Delta \lambda} = \hat{\mathbf{D}}^{el} \cdot \mathbf{m}(\sigma_j^{k+1})$; $\frac{\partial r_F}{\partial \sigma} = \mathbf{m}^T(\sigma_j^{k+1})$; $\frac{\partial r_F}{\partial \Delta \lambda} = -h$. Тут індекс k відноситься до

кроку навантаження, а індекс j – до номеру ітерацій за методом Ньютона.

Використання лінеаризації системи рівнянь вигляду (3.14) та її розв’язання методом виключення Гауса замість обернення матриці в (3.13) з використанням одиничної матриці ($\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{E}$) дає змогу на кожному кроці ітерацій значно скоротити кількість арифметичних операцій, приблизно на $2n(n-1)^2$, де n – розмірність системи рівнянь.

Алгоритм розв’язання пружно-пластичної задачі може бути таким. Для $k=1$ розв’язується звичайна пружна задача відносно повних переміщень за граничних умов (3.4)–(3.6) і визначається тензор пробних напружень. Далі в частині тіла, що знаходиться в пружно-пластичному стані, із розв’язку (3.14) визначаються тензори прирощення пластичних деформацій та пружних напружень і знаходяться початкові напруження за формулою [20]

$$\sigma^{0(k)} = \Delta \lambda^{(k)} \hat{\mathbf{D}}^{el} \cdot \mathbf{m}^{(k)}. \quad (3.15)$$

Подальші кроки інтегрування (3.1), (3.2) для $k > 1$ виконуються тільки з навантаженням початковими напруженнями (3.15), (3.16) за граничних умов (3.4), тобто без врахування зовнішнього та внутрішнього навантаження. При цьому також розв’язується пружна задача і визначається вектор прирощення переміщень $\Delta \mathbf{u}^k$ та уточнюються компоненти вектора повних переміщень, за якими знаходяться нові значення компонент тензора пробних напружень. Потім із розв’язку (3.14) визначаються нові значення компонент тензорів прирощення пластичних деформацій і пружних напружень для частини тіла, що знаходиться в пружно-пластичному стані. Далі для виконання наступного кроку навантаження знаходиться тензор прирощення початкових напружень за формулою [20]

$$\boldsymbol{\sigma}^{0(k)} = \Delta\lambda^k \hat{\mathbf{D}}^{el} \cdot \mathbf{m}^k - \boldsymbol{\sigma}^{0(k-1)}. \quad (3.16)$$

Тензор пластичних деформацій визначається за формулою [20, 22]

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{pl(k)} = \boldsymbol{\varepsilon}^{pl(k-1)} + \Delta\lambda^k \mathbf{m}^k. \quad (3.17)$$

Критерієм закінчення розрахунків може бути виконання однієї з умов [20, 22]

$$|\Delta \mathbf{u}^k| \leq \delta_u \text{ або } |\varepsilon_{eq}^{pl(k)}| \leq \delta_\varepsilon. \quad (3.18)$$

В основі алгоритму (3.7)–(3.18) лежить розв’язання лінійної пружної задачі методом скінченних елементів, числова методика якої докладно викладена в [5].

На цьому викладення неявного алгоритму зворотного відображення закінчено, але задачу пружно-пластичності можна також розв’язувати іншими способами, наприклад в [19] викладено методики, що базуються на покроковому навантаженні: покроковий алгоритм предиктор-коректор (додаток Б.1) та покроковий зворотний алгоритм (додаток Б.2).

3.3. Програмна реалізація числової методики та верифікація

Програмна реалізація числової методики розв’язання задачі пружно-пластичності ізотропного матеріалу так само як і задач теплопровідності й тепло-електропровідності (див. підрозділи 1.3, 2.3) виконана на мові програмування системи **Mathcad** [12]. Оцінка точності розрахунків проведена за допомогою порівняння з числовими розв’язками задач, отриманими за допомогою іншого програмного забезпечення [13]. Як геометричний об’єкт обрано товстостінний циліндр за граничних умов Дирихле та Неймана.

Числова модель задачі пружно-пластичності являє собою четверту частину товстостінного циліндра, яку побудовано за допомогою спеціального **geo**-файлу у програмі **Gmsh** [9] (рис. 3.1) та виконано її дискретизацію на тетраедри CE – файл **Cyl_pl.msh** (рис. 3.2).

```
// ініціалізація змінних
// Параметри циліндра
r1=0.05;          //радіус
r2=0.08;          //радіус
h=0.005;          // висота
c1=0.0025;        //параметр сітки
// точки
```

```

Point(1) = {r1, 0, 0, cl};
Point(2) = {0, 0, 0, cl};
Point(3) = {0, r1, 0, cl};
Point(4) = {r2, 0, 0, cl};
Point(5) = {0, r2, 0, cl};
// лінії
Line(1) = {1, 4};
Circle(2) = {4, 2, 5};
Line(3) = {5, 3};
Circle(4) = {3, 2, 1};
// замкнутий контур
Line Loop(11) = {1, 2, 3, 4};
// поверхня
Plane Surface(1) = {11};
// витягування вздовж осі OZ
Extrude {0, 0, h} { Surface{1}; }

```

Рис. 3.1. Текст **geo**-файлу для побудови чверті товстостінного циліндра у програмі **Gmsh**

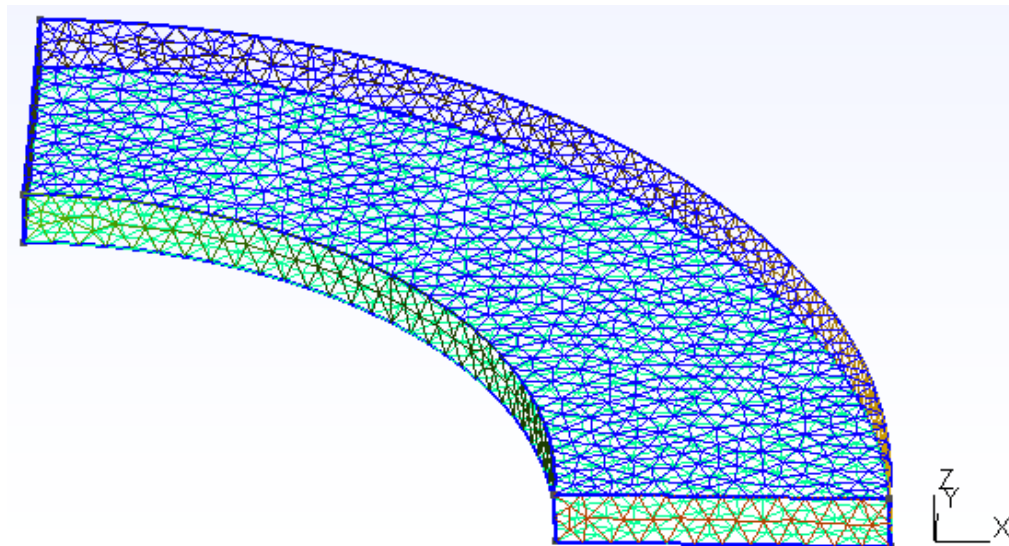


Рис. 3.2. Дискретизація моделі чверті товстостінного циліндра тетраедними СЕ (1750 – вузлів; 9003 – скінченних елементів)

Для розв'язання нелінійної задачі пружно-пластичності ізотропного матеріалу використовується файл **Mathcad** [12] **P1_RMA_MIZES_Biso.xmcd** (додаток А.3), який є програмним кодом **Mathcad** і який розроблено згідно з математичною постановкою задачі (див. підрозділ 3.1) та методики її числового розв'язання (див. підрозділ 3.2). Для того, щоб скористатися цим кодом спочатку треба виконати деякі підготовчі операції. Для правильного зчитування даних в програмі **Mathcad** у перший рядок файлу дискретизації **Cyl_pl.msh** необхідно додати такий рядок:

```
11 22 33 44 55 66 77 88 99 100
```

У програмі **Gmsh** також необхідно визначити номери поверхонь для задання граничних умов та глобальні номери вузлів по лініях небезпечних перетинів для побудови відповідних епюр, як це показано в [5].

Після закінчення виконання вказаних операцій файл **P1_RMA_MIZES_Biso.xmcd** завантажується в систему **Mathcad** і розпочинається робота з адаптації програмного коду для розв'язання задачі пружно-пластичності.

Спершу задаються фізичні властивості матеріалу за даними тестових прикладів, що наведені нижче за текстом, параметри граничних умов та підключається відредагований файл **Cyl_p1.msh** у разі, якщо він автоматично не підключився. Далі за номерами поверхонь для завдання ГУ визначаються параметри дискретизації цих поверхонь: номери трикутних елементів та номери вузлів, що їм відповідають, та задаються ГУ.

Розв'язання нелінійної задачі пружно-пластичності виконується шляхом послідовного перегляду файла **P1_RMA_MIZES_Biso.xmcd** до місця запису результатів розрахунків фізичних полів. При цьому необхідно з'ясувати основні етапи розв'язання задачі: від функцій алгоритму зворотного відображення, формування глобальної матриці і вільного члена СЛАР та її розв'язання відносно припущення переміщень, розрахунків компонентів тензорів повної, пластичної та пружної деформацій, пружних напружень, еквівалентної повної та пластичної деформацій і еквівалентних напружень у СЕ та глобальних вузлах, запису результатів розрахунків фізичних полів у файли **...\Result_1.dat** і **...\NNodes_Elements.dat** аналогічно [5]. Формування текстового файлу формату **Tecplot** здійснюється так само, як це описано в [5]. Епюри фізичних полів по лініях в небезпечних перетинах конструкції будуються за визначеними в програмі **Gmsh** номерами глобальних вузлів після їх запису у відповідний вектор у коді **P1_RMA_MIZES_Biso.xmcd** [5].

Тестування розробленого в середовищі **Mathcad** [12] програмного забезпечення для розв'язання нелінійної задачі пружно-пластичності (3.1)–(3.7) ізотропного середовища проведено за тестом, що включає задачі ізотропного зміцнення та ідеальної пластичності.

Під час тестових розрахунків з використанням коду **P1_RMA_MIZES_Biso.xmcd** було встановлено, що для виконання умови на поверхні плинності (3.11) з точністю 10^{-6} в кожному пластичному СЕ необхідно виконати шість ітерацій, а для досягнення точності 0,1 % визначення компонент вектора переміщень необхідно 10–15 кроків навантаження початковими напруженнями.

Тест. Задача пружно-пластичності без та з врахуванням ізотропного зміцнення товстостінного циліндра з радіусами $r_1/r_2 = 0,05/0,08$ м. Матеріал

вуглецева сталь – $E = 2 \cdot 10^{11}$ Па, $\nu = 0,3$, $\sigma_{y0} = 320$ МПа, $h = 1,5$ ГПа. Тиск на внутрішній поверхні стінки циліндра становить – $p = 150$ МПа.

Сіткова збіжність розв’язку задачі визначалася методом подвійного перерахунку. У результаті встановлено, що розрахункова сітка тестової задачі, що включає 2041 лінійний тетраедний СЕ і 743 вузлів, призводить до похибки у визначення σ_{eq} не більше 0,5 %.

Результати численного розв’язання задачі пружно-пластичності для випадків ізотропного зміцнення та ідеальної пластичності та їх порівняння з даними, отриманими з використанням програмного продукту **ANSYS Mechanical APDL** [13] наведено в табл. 3.1 і 3.2.

Слід зазначити, що в **ANSYS Mechanical APDL** [13] визначення еквівалентних деформацій за Мізесом відбувається за формулою

$$\varepsilon_{eq} = \frac{1}{\sqrt{2}(1+\nu')} \sqrt{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_3)^2 + (\varepsilon_3 - \varepsilon_1)^2 + \frac{3}{2}(\varepsilon_4^2 + \varepsilon_5^2 + \varepsilon_6^2)}; \quad (3.19)$$

де ν' – ефективний коефіцієнт Пуассона.

Для визначення еквівалентних пружних деформацій за Мізесом ε_{eq}^{el} $\nu' = \nu$, а для – еквівалентних пластичних деформацій за Мізесом ε_{eq}^{pl} $\nu' = 0,5$ [13], оскільки пластичні деформації відбуваються за незмінного об’єму. Тому тут і далі в програмних кодах **Mathcad** для порівняння результатів з **ANSYS Mechanical APDL** була використана формула (3.19).

Табл. 3.1. Результати зіставлення розв’язків задачі пружно-пластичності з врахуванням ізотропного зміцнення

Тип розв’язку	u_s , м	σ_{eq} , МПа	ε_{eq}^{el}	ε_{eq}^{pl}
ANSYS Mechanical APDL , вузлів 774, СЕ – 2209	$8,61 \cdot 10^{-5}$ – 0,000112	213–322	0,001064– 0,001608	0–0,001217
Mathcad , вузлів 743, СЕ – 2041	$8,675 \cdot 10^{-5}$ – 0,000112	215,3–321,83	0,001076– 0,001607	0–0,001218
Похибка, %	0,75–0,038	1,08–0,053	1,13–0,06	0–0,08

Примітка: $u_s = |\mathbf{u}|$ – модуль вектора переміщень; σ_{eq} – еквівалентні напруження за Мізесом; ε_{eq}^{el} і ε_{eq}^{pl} – еквівалентні пружні та пластичні деформації за Мізесом, відповідно.

Для візуалізації результатів розрахунків фізичних полів застосовується вільно відкритий програмний код **ParaView** [14] з використанням текстового файлу формату **Tecplot**, отриманого вище. Результати числового

моделювання з використанням розробленого програмного забезпечення наведено на рис. 3.3.

Табл. 3.2. Результати зіставлення розв'язків задачі пружно-пластичності для випадку ідеальної пластичності

Тип розв'язку	u_s , м	σ_{eq} , МПа	ε_{eq}^{el}	ε_{eq}^{pl}
ANSYS Mechanical APDL , вузлів 774, CE – 2209	$8,62 \cdot 10^{-5}$ – 0,000113	213–320	0,001066– 0,0016	0–0,001128
Mathcad , вузлів 743, CE – 2041	$8,615 \cdot 10^{-5}$ – 0,0001111	212,8–320	0,001068– 0,00162	0–0,00115825
Похибка, %	0,058–1,68	0,094-0	0,84–1,25	0–3,58

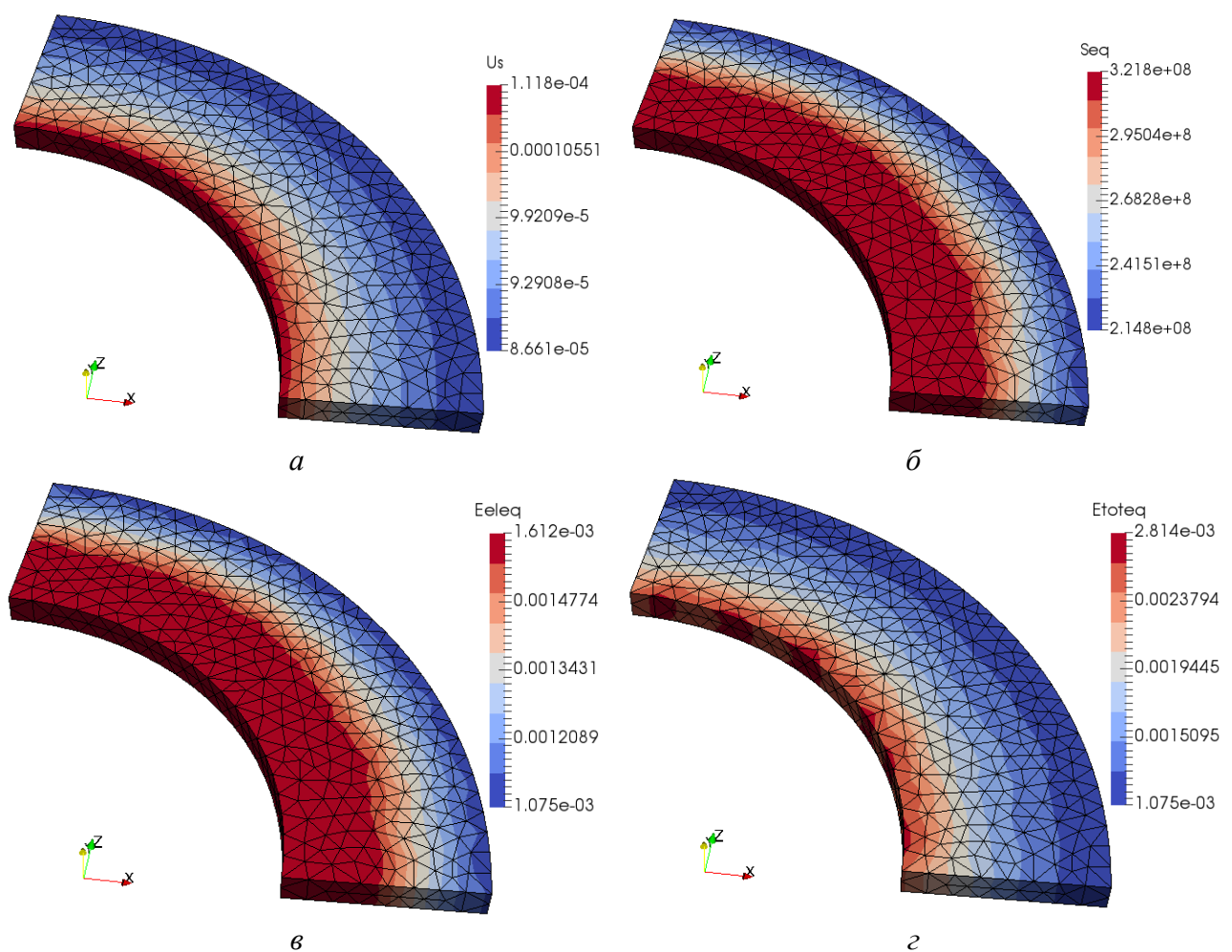


Рис. 3.3. Результати числового моделювання задачі пружно-пластичності з врахуванням ізотропного зміцнення: а – поле сумарних переміщень; б – поле еквівалентних напружень за Мізесом; в – поле еквівалентних пружних деформацій за Мізесом; г – поле повних еквівалентних деформацій за Мізесом

Аналіз порівняння результатів показує, що дані моделювання за розробленим програмним забезпеченням (файл – **Pl_RMA_MIZES_Biso.xmcd**) збігаються з числовими розв’язками, отриманими з використанням програмного забезпечення **ANSYS Mechanical APDL** [13]. При цьому максимальне значення похибки визначення фізичних величин не перевищують 1,68–3,58 % залежно від умов задачі.

Запитання для самоконтролю

1. Наведіть основні відмінності між деформаційною теорією пластичності та теорією пластичної течії.
2. Опишіть сутність інкрементної теорії пластичності незалежної від швидкості пружно-пластичної поведінки ізотропного матеріалу.
3. Сформулюйте математичну постановку задачі пружно-пластичності в наближенні теорії пластичної течії.
4. Запишіть та поясніть сутність умови плинності матеріалу в разі його ізотропного зміцнення.
5. Запишіть вирази для еквівалентних напружень та пластичних деформацій за Мізесом через відповідні девіатори та поясніть їх сутність.
6. Сформулюйте початкові та граничні умови пружно-пластичної поведінки ізотропного матеріалу та поясніть їх сутність.
7. Опишіть сутність неявного алгоритму RMA на прикладі розв’язання задачі пружно-пластичної поведінки ізотропного матеріалу.
8. Запишіть рівняння стану, що описує пружно-пластичні деформації в матеріалі та поясніть його сутність.
9. У чому полягає асоціативний закон пластичної течії?
10. Дайте визначення скалярного асоціативного множника або коефіцієнта пластичності.
11. У чому полягає обернений метод Ейлера?
12. Що таке тензор пробних напружень? Обґрунтуйте необхідність його використання в алгоритмі зворотного відображення (RAM).
13. Для чого потрібне представлення тензорів у вигляді векторів? Чим воно досягається?
14. Опишіть особливості застосування метода Ньютона в алгоритмі зворотного відображення.
15. Опишіть основні етапи неявного алгоритму розв’язання пружно-пластичної задачі. Чим від відрізняється від покрокового алгоритму предиктор-коректор?
16. В чому полягає різниця між задачами ізотропного зміцнення та ідеальною пластичністю?

17. Опишіть оператори та функції, що входять у **geo**-файл програми **Gmsh** для побудови тривимірної геометрії чверті товстостінного циліндра (основні функції **Gmsh**).

18. Яким чином виконується дискретизація тривимірної фігури у програмі **Gmsh** та здійснюється визначення номерів поверхонь для задання ГУ?

19. Наведіть перелік вихідних даних для розв'язання нелінійної задачі пружно-пластичності.

20. Опишіть порядок задання граничних умов у файлі **P1_RMA_MIZES_Biso.xmcd**.

21. Опишіть основні етапи розв'язання задачі пружно-пластичності ізотропного матеріалу.

22. Охарактеризуйте структуру файла формату **Tecplot** для візуалізації результатів розрахунків з використанням тетраедрих СЕ на прикладі задачі пластичності.

23. Опишіть порядок візуалізації результатів розрахунків задачі пластичності у програмі **ParaView**.

4. ЗАДАЧА ПРУЖНО-ПЛАСТИЧНОЇ ПОВЕДІНКИ СИПКОГО МАТЕРІАЛУ

4.1. Математична постановка задачі

Згідно з інкрементарною теорією пластичності математична модель пружно-пластичної поведінки ізотропного сипкого матеріалу включає рівняння рівноваги, узагальнений закон Гука та геометричне рівняння вигляду [17, 18, 22]:

$$\begin{cases} \dot{\sigma}_{ij,j} + \rho \dot{b}_i = 0; \\ \dot{\sigma}_{ij} = \frac{E}{1+\nu} \left(\dot{\varepsilon}_{ij} + \frac{\nu}{1-2\nu} \delta_{ij} \dot{\varepsilon}_{kk} \right) - \dot{\sigma}_{ij}^0; \quad i, j = 1, 2, 3 \\ \dot{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{2} (\dot{u}_{i,j} + \dot{u}_{j,i}) = \dot{\varepsilon}_{ij}^{el} + \dot{\varepsilon}_{ij}^{pl}, \end{cases} \quad (4.1)$$

де $\dot{\sigma}_{ij}$ – компоненти симетричного тензора прирощення напруження 2-го рангу, Па; ρ – густина, кг/м³; b_i – компоненти вектора прирощення масових сил, наприклад, гравітаційних, Н/кг; E – модуль пружності під час одновісного стискування, Па; ν – коефіцієнт Пуассона; δ_{ij} – символ Кронекера; $\dot{\sigma}_{ij}^0$ – компоненти тензора прирощення початкового напруження, Па; $\dot{\varepsilon}_{ij}^{el}, \dot{\varepsilon}_{ij}^{pl}$ – пружна та пластична складові тензора прирощення повних деформацій $\dot{\varepsilon}_{ij}$, відповідно; \dot{u}_i – компоненти вектора прирощення переміщення, м.

У разі використання критерію настання стану пластичності Drucker-Prager умова плинності сипкого матеріалу (функція пластичності) записується таким чином [17, 18, 22]

$$F(\sigma_{ij}, c, \varphi) = \sigma_{eqDP} - \sigma_y(c, \varphi), \quad (4.2)$$

де F – функція поверхні плинності сипкого матеріалу;
 $\sigma_{eqDP} = 3\alpha(\varphi)\sigma_m + \sqrt{\frac{1}{2}s_{ij}s_{ij}}$ – еквівалентне напруження за Drucker-Prager, Па;
 $s_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3}\delta_{ij}\sigma_{kk}$ – компоненти тензора девіаторних напружень, Па;
 $\sigma_m = \frac{1}{3}\delta_{ij}\sigma_{kk}$, Па; $\sigma_y(c, \varphi)$ – границя плинності сипкого матеріалу, Па; c – си-

ла зчеплення між гранулами сипкого матеріалу, Па; φ – кут внутрішнього тертя або кут природного укосу сипкого матеріалу, рад.

Якщо припустити, що поверхня плинності Drucker-Prager огинає поверхню плинності Мора-Кулона [17, 18, 22] то вирази для $\sigma_y(c, \varphi)$ і $\alpha(\varphi)$ набувають вигляду:

$$\sigma_y(c, \varphi) = \frac{6c \cos \varphi}{\sqrt{3}(3 - \sin \varphi)}, \quad \alpha(\varphi) = \frac{2 \sin \varphi}{\sqrt{3}(3 - \sin \varphi)}. \quad (4.3)$$

Початкові умови для (4.1), (4.2):

$$\dot{\sigma}_{ij}^0 = 0, \quad i, j = 1, 2, 3. \quad (4.4)$$

Граничні умови для (4.1), (4.2):

– прирощення вектора переміщення

$$\dot{u}_i|_{S_u} = 0, \quad i = 1, 2, 3, \quad (4.5)$$

де S_u – поверхня (або точка поверхні), на якій задано переміщення, м²;

– симетрії

$$n_i \dot{u}_i|_{S_{su}} = 0, \quad i = 1, 2, 3, \quad (4.6)$$

де n_i – компоненти вектора зовнішньої нормалі до поверхні тіла; S_{su} – поверхня симетрії тіла, м².

4.2. Методика числового розв'язання задачі

Для числового розв'язання сформульованої задачі (4.1)–(4.6) розглянемо основні теоретичні положення неявного алгоритму зворотного відображення (Return-mapping Algorithms) [16–18, 22] (див. підрозділ 3.2). Істинні пружні напруження в разі виникнення пружно-пластичних деформацій у сипкому матеріалі визначаються співвідношенням [22]

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} (\varepsilon_{kl}^{tr} - \varepsilon_{kl}^{pl}), \quad (4.7)$$

де σ_{ij} – компоненти тензора напруження 2-го рангу, Па; C_{ijkl} – компоненти тензора четвертого рангу пружних констант матеріалу, Па; ε_{kl}^{tr} – компоненти

тензора пробних (повних) деформацій 2-го рангу, що визначається в наближенні пружного середовища; $\varepsilon_{kl}^{pl} = \sum_{i=1}^N (\Delta \varepsilon_{kl}^{pl})_i$ – компоненти тензора пластичних деформацій 2-го рангу; $\Delta \varepsilon_{kl}^{pl}$ – компоненти тензора прирощення пластичної деформації на i -у кроці навантаження; N – кількість кроків навантаження.

У разі неасоціативного закону пластичної течії, коли $\alpha \neq \beta$, маємо [22]:

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^{pl} = \Delta \varepsilon_{ij}^{pl} = \Delta \lambda m_{ij} \text{ або } \dot{\hat{\varepsilon}}^{pl} = \Delta \hat{\varepsilon}^{pl} = \Delta \lambda \hat{\mathbf{m}}, \quad (4.8)$$

де $\beta(\gamma) = \frac{2 \sin \gamma}{\sqrt{3}(3 - \sin \gamma)}$; γ – кут дилатансії, рад; $\hat{\mathbf{m}} = \frac{\partial G}{\partial \hat{\boldsymbol{\sigma}}}$.

Потенційна функція критерію плинності Drucker-Prager виражається співвідношенням [22]

$$G = 3\beta(\gamma)\sigma_m + \sqrt{\frac{1}{2}s_{ij}s_{ij}} + \text{const}. \quad (4.9)$$

Скалярний асоціативний множник $\Delta \lambda$ або коефіцієнт пластичності (4.8) у разі відсутності зміцнення визначається за формулою [22]

$$\Delta \lambda = \frac{n_{ij}C_{ijkl}\varepsilon_{kl}^{tr}}{n_{ij}C_{ijkl}m_{kl}} \text{ або } \Delta \lambda = \frac{\hat{\mathbf{n}} : \hat{\mathbf{C}} : \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^{tr}}{\hat{\mathbf{n}} : \hat{\mathbf{C}} : \hat{\mathbf{m}}^T}, \quad (4.10)$$

де $\hat{\mathbf{n}} = \frac{\partial F}{\partial \hat{\boldsymbol{\sigma}}} = \alpha \hat{\mathbf{I}} + \frac{1}{2} \frac{\hat{\mathbf{s}}}{\sqrt{\frac{1}{2}\hat{\mathbf{s}}:\hat{\mathbf{s}}}}$ і $\hat{\mathbf{m}} = \frac{\partial G}{\partial \hat{\boldsymbol{\sigma}}} = \beta \hat{\mathbf{I}} + \frac{1}{2} \frac{\hat{\mathbf{s}}}{\sqrt{\frac{1}{2}\hat{\mathbf{s}}:\hat{\mathbf{s}}}}$ – тензори 2-го рангу, які є

похідними від функцій (4.2) і (4.9) за тензором напруження, відповідно; $\hat{\mathbf{C}}$ – тензор пружних констант четвертого рангу, Па; $\hat{\mathbf{I}}$ – одиничний тензор другого рангу; $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^{tr}$ – тензор пробних пружних деформацій на кожному кроці навантаження.

З врахуванням (4.8) і (4.10) формулу (4.7) для $k+1$ кроку навантаження можна переписати у вигляді [22]

$$\sigma_{ij}^{k+1} = \sigma_{ij}^{tr} - \Delta \lambda^{k+1} C_{ijkl} m_{ij}(\sigma_{ij}^{k+1}) \text{ або } \hat{\boldsymbol{\sigma}}^{k+1} = \hat{\boldsymbol{\sigma}}^{tr} - \Delta \lambda^{k+1} \hat{\mathbf{C}} : \hat{\mathbf{m}}(\hat{\boldsymbol{\sigma}}^{k+1}), \quad (4.11)$$

де $\hat{\boldsymbol{\sigma}}^{tr} = \hat{\mathbf{C}}^4 : \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^{tr}$ – тензор пробних напружень, що визначається в наближенні пружного середовища, Па.

Формула (4.11) дає відображення тензора пробного напруження $\hat{\boldsymbol{\sigma}}^{tr}$ в напрямку поверхні плинності. Тому цей метод інтегрування, який побудовано на зворотному методі Ейлера, дістав назву алгоритму зворотного відображення [17, 18, 22].

Система рівнянь (4.11) з врахуванням симетрії тензора напруження має сім невідомих, а саме шість незалежних компонент $\hat{\boldsymbol{\sigma}}^{tr}$ і $\Delta\lambda$. Тому для однозначності системи рівнянь (4.11) її треба доповнити скалярним рівнянням (4.2) у вигляді вимоги про те, що умова плинності дотримується в кінці стадії навантаження [22]

$$F(\hat{\boldsymbol{\sigma}}^{k+1}, \Delta\lambda) = 0. \quad (4.12)$$

Нелінійну систему рівнянь (4.11), (4.12) можна переписати у форматі неув'язок. При цьому необхідно виконати перехід на шестивимірний простір з врахуванням симетрії тензорів напруження і деформації. Це дає змогу замінити тензори другого рангу $\hat{\boldsymbol{\sigma}}^{k+1}$, $\hat{\boldsymbol{\sigma}}^{tr}$, $\hat{\mathbf{n}}$, $\hat{\mathbf{m}}$ на відповідні вектори $\boldsymbol{\sigma}^{k+1}$, $\boldsymbol{\sigma}^{tr}$, \mathbf{n} і \mathbf{m} з шістьма компонентами та замість тензора четвертого рангу $\hat{\mathbf{C}}^4$ використувати тензор другого рангу пружних констант $\hat{\mathbf{D}}^{el}$ розмірністю 6×6 [22]:

$$\begin{cases} \mathbf{r}_{\boldsymbol{\sigma}} = \boldsymbol{\sigma}^{k+1} - \boldsymbol{\sigma}^{tr} + \Delta\lambda^{k+1} \hat{\mathbf{D}}^{el} \cdot \mathbf{m}(\boldsymbol{\sigma}^{k+1}); \\ r_F = F(\boldsymbol{\sigma}^{k+1}, \Delta\lambda^{k+1}). \end{cases} \quad (4.13)$$

Для розв'язання системи нелінійних рівнянь (4.13) зазвичай використовується метод Ньютона, ітераційна процедура якого записується таким чином [22]:

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma}_{j+1}^{k+1} \\ \Delta\lambda_{j+1}^{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma}_j^{k+1} \\ \Delta\lambda_j^{k+1} \end{pmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{r}_{\boldsymbol{\sigma}}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} & \frac{\partial \mathbf{r}_{\boldsymbol{\sigma}}}{\partial \Delta\lambda} \\ \frac{\partial r_F}{\partial \boldsymbol{\sigma}} & \frac{\partial r_F}{\partial \Delta\lambda} \end{bmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{r}_{\boldsymbol{\sigma}}^j \\ \mathbf{r}_F^j \end{pmatrix}, \quad (4.14)$$

де $\frac{\partial \mathbf{r}_{\boldsymbol{\sigma}}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \hat{\mathbf{I}} + \Delta\lambda_j^{k+1} \hat{\mathbf{D}}^{el} \cdot \frac{\partial \mathbf{m}(\boldsymbol{\sigma}_j^{k+1})}{\partial \boldsymbol{\sigma}}$; $\frac{\partial \mathbf{r}_{\boldsymbol{\sigma}}}{\partial \Delta\lambda} = \hat{\mathbf{D}}^{el} \cdot \mathbf{m}(\boldsymbol{\sigma}_j^{k+1})$; $\frac{\partial r_F}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{n}^T(\boldsymbol{\sigma}_j^{k+1})$; $\frac{\partial r_F}{\partial \Delta\lambda} = 0$.

Тут індекс k відноситься до кроку навантаження, а індекс j до номеру ітерації за методом Ньютона.

На кожному кроці ітерацій за методом Ньютона (4.14) доцільно не

знаходити обернену матрицю, а розв'язувати СЛАР методом виключення Гауса, що дає змогу значно зменшити кількість арифметичних операцій, приблизно на $2n(n-1)^2$ на кожному пластичному скінченному елементі, де n – розмірність СЛАР.

Для $k=1$ розв'язується звичайна пружна задача відносно повних переміщень за умови задання граничних умов (4.4)–(4.6), за якими визначаються пробні напруження. Далі в частині шару сипкого матеріалу, що знаходиться в пружно-пластичному стані, визначаються приращення пластичної деформації і тензор пружного напруження із розв'язку (4.14) і знаходяться початкові напруження за формулою $\sigma^{0(k=1)} = \Delta\lambda^{(k=1)} \hat{\mathbf{D}}^{el} \cdot \mathbf{m}^{(k=1)}$ [22].

Наступні кроки інтегрування (4.1), (4.2) для $k > 1$ виконуються за ГУ (4.5) тільки з навантаженням початковими напруженнями [22]. При цьому також розв'язуються пружна задача і визначаються приращення переміщень $\Delta \mathbf{u}^k$, уточнюються значення повних переміщень, за якими знаходяться нові пробні напруження, та із розв'язку (4.14) нове значення приращення пластичної деформації і тензора пружного напруження для частини тіла, що знаходиться в пружно-пластичному стані. Далі визначаються приращення початкових напружень $\sigma^{0(k)} = \Delta\lambda^k \hat{\mathbf{D}}^{el} \cdot \mathbf{m}^k - \sigma^{0(k-1)}$ для виконання наступного кроку навантаження. Критерієм закінчення розрахунків може бути, наприклад, виконання умови $|\Delta \mathbf{u}^k| \leq \delta_u$ або $|\epsilon_{eq}^{pl(k)}| \leq \delta_\epsilon$.

Нові пробні напруження $\sigma^{tr(k)}$ в алгоритмі розв'язання задачі також можна визначати через попередні їх значення $\sigma^{tr(k-1)}$ і приращення пружних деформацій $\Delta \epsilon^k$, що знаходяться через $\Delta \mathbf{u}^k$, за формулою [22]

$$\sigma^{tr(k)} = \sigma^{tr(k-1)} + \hat{\mathbf{D}}^{el} \cdot \Delta \epsilon^k (\Delta \mathbf{u}^k). \quad (4.15)$$

Для визначення $\Delta \mathbf{u}^k$ на кожному кроці інтегрування за часом використовується приращення початкових напружень у формі [22]

$$\sigma^{0(k-1)} = \Delta\lambda^{k-1} \hat{\mathbf{D}}^{el} \cdot \mathbf{n}^{k-1}. \quad (4.16)$$

Сумарні пластичні деформації визначаються за формулою [22]

$$\epsilon^{pl(k)} = \epsilon^{pl(k-1)} + \Delta\lambda^k \mathbf{n}^k. \quad (4.17)$$

У разі асоціативного закону пластичної течії, коли $\alpha = \beta$ ($\gamma = \varphi$), тобто функції плинності F (4.2) і G (4.9) збігаються між собою і відповідно $\mathbf{m} = \mathbf{n}$,

а напрям прирошення пластичної деформації під час течії стає нормальним до поверхні плинності. При цьому у формулах (4.6)–(4.12) треба виконати заміну **m** на **n**. Тобто задача дещо спрощується. Подальший алгоритм розв’язання задачі з асоціативним законом течії такий самий як і у разі неасоціативного [22].

4.3. Програмна реалізація числової методики та верифікація

Програмна реалізація числової методики розв’язання задачі пружно-пластичності ізотропного сипкого матеріалу так само як і попередніх задач (див. підрозділи 1.3–3.3) виконана на мові програмування системи **Mathcad** [12]. Оцінка точності розрахунків проведена за допомогою порівняння з числовими розв’язками задач, отриманими за допомогою іншого програмного забезпечення [13]. Як геометричний об’єкт обрано конус за умов гравітаційного навантаження за граничних умов Дирихле.

Числова модель задачі пружно-пластичності сипкого матеріалу являє собою четверту частину конуса, яку побудовано за допомогою спеціального **geo**-файлу у програмі **Gmsh** [9] (рис. 4.1) та виконано її дискретизацію на тетраедри **CE** – файл **Cone.msh** (рис. 4.2).

```
// ініціалізація змінних
dy = 0.3;
dx = 0.34;
cl=0.05;
// точки
Point(1) = {0, 0, 0, cl};
Point(2) = {0, dy, 0, cl};
Point(3) = {dx, 0, 0, cl};
// лінії
Line(1) = {1, 2};
Line(2) = {2, 3};
Line(3) = {3, 1};
// замкнутий контур
Line Loop(11) = {1, 2, 3};
// поверхня
Plane Surface(1) = {11};
Extrude { {0, 1, 0}, {0, 0.5, 0}, 3.14159/2 } {
Surface{ 1 }; }
```

Рис. 4.1. Текст **geo**-файлу для побудови чверті конуса у програмі **Gmsh**

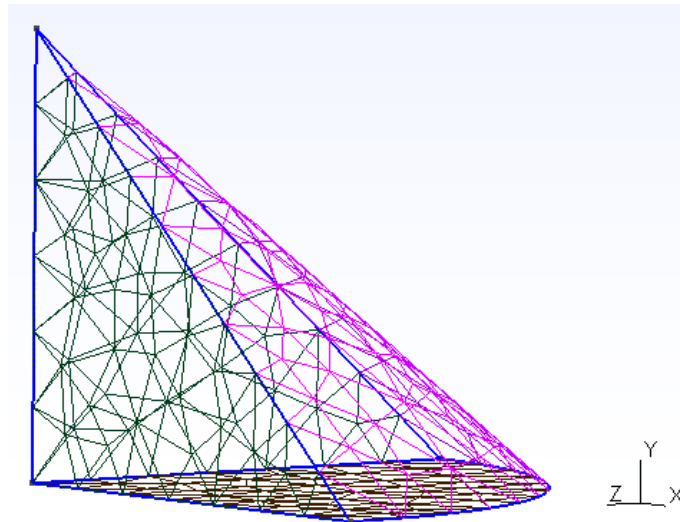


Рис. 4.2. Дискретизація моделі чверті товстостінного циліндра тетраедними СЕ (176 – вузлів; 403 – скінченних елементів)

Для розв’язання нелінійної задачі пружно-пластичності ізотропного матеріалу використовується файл **Mathcad** [12] **P1_RMA_DP.xmcd** (додаток А.4), який є програмним кодом **Mathcad** і який розроблено згідно з математичною постановкою задачі (див. підрозділ 4.1) та методики її числового розв’язання (див. підрозділ 4.2). Для того, щоб скористатися цим кодом спочатку треба виконати деякі підготовчі операції. Для правильного зчитування даних в програмі **Mathcad** у перший рядок файлу дискретизації **Cone.msh** необхідно додати такий рядок:

11 22 33 44 55 66 77 88 99 100

У програмі **Gmsh** також необхідно визначити номери поверхонь для задання граничних умов, як це показано в [5].

Після закінчення виконання вказаних операцій файл **P1_RMA_DP.xmcd** завантажується в систему **Mathcad** і розпочинається робота з адаптації програмного коду для розв’язання задачі пружно-пластичності.

Спершу задаються фізичні властивості матеріалу за даними тестових прикладів, що наведені нижче за текстом, параметри граничних умов та підключається відредагований файл **Cone.msh** у разі, якщо він автоматично не підключився. Далі за номерами поверхонь для завдання ГУ визначаються параметри дискретизації цих поверхонь: номери трикутних елементів та номери вузлів, що їм відповідають, та задаються ГУ.

Розв’язання нелінійної задачі пружно-пластичності сипкого матеріалу виконується шляхом послідовного перегляду файла **P1_RMA_DP.xmcd** до місця запису результатів розрахунків фізичних полів. При цьому необхідно з’ясувати основні етапи розв’язання задачі: від функцій алгоритму зворотного відображення, формування глобальної матриці і вільного члена СЛАР та її розв’язання відносно

прирошення переміщень, розрахунків компонентів тензорів повної, пластичної та пружної деформацій, пружних напружень, еквівалентної повної та пластичної деформацій і еквівалентних напружень в СЕ та глобальних вузлах, запису результатів розрахунків фізичних полів у файли ...\\Result_1.dat і ...\\NNodes_Elements.dat аналогічно [5]. Формування текстового файлу формату **Tecplot** здійснюється так само, як це описано в [5].

Тестування розробленого у середовищі **Mathcad** [12] програмного забезпечення для розв'язання нелінійної задачі пружно-пластичності (4.1)–(4.6) сипкого середовища проведено за тестом з модельним матеріалом, що характеризується асоціативним законом течії [22].

Тест. Задача пружно-пластичності сипкого матеріалу з використанням класичної моделі Drucker-Prager. Розрахункова область – тривимірна, чверть конуса з радіусом $r = \sqrt{x^2 + y^2} = 0,34$ м і висотою $z = 0,3$ м. Фізичні властивості сипкого матеріалу: насипна густина – $\rho = 800$ кг/м³, модуль пружності – $E = 4000$ Па, коефіцієнт Пуассона – $\nu = 0,45$, сила зчеплення між гранулами сипкого матеріалу – $c = 400$ Па, кут природного укосу $\phi = 15^\circ$. Навантаження – гравітація $g_z = -9,81$ м/с². Закон течії асоціативний $\alpha = \beta$. Граничні умови: закріплення на площині xOy – $u_z=0$, симетрія на площинах xOz і yOz . Тобто умови задачі та розв'язок відповідає двовимірній вісесиметричній задачі.

Результати розв'язання задачі та їх порівняння з даними отриманими за допомогою програмного продукту **ANSYS Mechanical APDL** [13] для вісесиметричної геометрії наведено в табл. 1.

Табл. 4.1. Результати порівняння розв'язків задачі пластичності сипкого матеріалу ($\phi = 15^\circ$, $\sigma_y = 488,27$ Па)

Тип розв'язку	u_s , м	σ_{eqM} , Па	σ_{eqDP} , Па	ε_{eqM}^{el}	ε_{eqM}^{pl}	σ_m , Па
ANSYS Mechanical APDL , 2D axisymmetric, $N=630$, $El=1148$	0–0,051986	0,7–1342,2	–	0,007514–0,335525	0–0,05423	-876,238–151,593
Mathcad , 3D, $N=3608$, $El=14641$	0–0,051518	37,94–1347,83	488,27	0,009485–0,336254	0–0,05709	-886,353–181,923
Різниця, %	0,90	-0,42	–	-0,22	-5,27	-1,23

Примітка: N – кількість вузлів; El – кількість скінченних трикутних або тетраедричних елементів; u_s – результуюче переміщення, м; σ_{eqM} – еквівалентне напруження за Мізесом, Па; σ_{eqDP} – еквівалентне напруження за Drucker-Prager, Па; ε_{eqM}^{el} – еквівалентна пружна деформація за Мізесом; ε_{eqM}^{pl} – еквівалентна пластична деформація за Мізесом; σ_m – гідростатичний тиск, Па; ϕ – кут природного укосу, град.; σ_y – границя плинності матеріалу, Па.

Для візуалізації результатів розрахунків фізичних полів застосовується вільно відкритий програмний код **ParaView** [14] з використанням текстового файлу формату **Tecplot**, отриманого вище. Результати числового моделювання з використанням розробленого програмного забезпечення наведено на рис. 4.3.

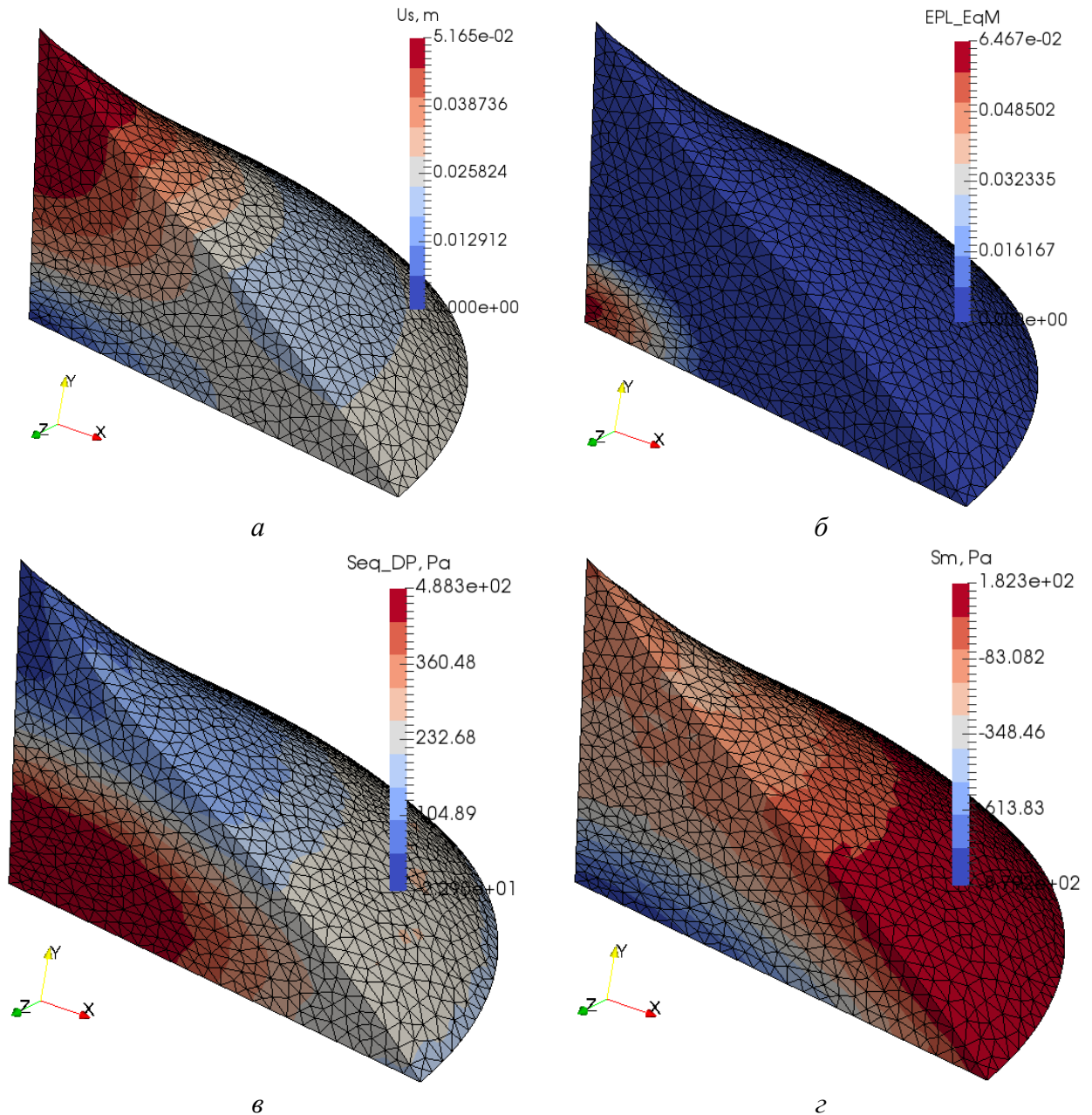


Рис. 4.3. Результати числового моделювання задачі пластичності сипкого матеріалу полів переміщень ($\varphi = 15^\circ$, $\sigma_y = 488,27$ Па): *a* – поле сумарних переміщень; *б* – поле еквівалентних пластичних деформацій за Мізесом; *в* – поле еквівалентних напружень за Drucker-Prager; *г* – поле гідростатичного тиску

Аналіз порівняння результатів показує, що дані моделювання за розробленим програмним забезпеченням (файл – **P1_RMA_DP.xmcd**) збігаються з числовими розв'язками, отриманими з використанням програмного забезпечення **ANSYS Mechanical APDL** [13]. При цьому максимальне значення похибки визначення фізичних величин не перевищують 1,23–5,27 % залежно від умов задачі.

Запитання для самоконтролю

1. Сформулюйте математичну постановку задачі пружно-пластичності сипкого матеріалу в наближенні теорії пластичної течії.
2. Опишіть сутність критерію Drucker-Prager, що визначає настання стану плинності сипкого матеріалу.
3. Запишіть вираз для еквівалентного напруження за Drucker-Prager та поясніть його сутність.
4. Запишіть вираз для границі плинності сипкого матеріалу у разі, коли поверхня плинності Drucker-Prager огинає поверхню плинності Мора-Кулона.
5. Сформулюйте початкові та граничні умови пружно-пластичної поведінки сипкого матеріалу із ізотропними властивостями та поясніть їх сутність.
6. Опишіть сутність неявного алгоритму зворотного відображення на прикладі розв'язання задачі пружно-пластичної поведінки сипкого матеріалу.
7. Запишіть рівняння для потенційної функції критерію плинності Drucker-Prager та поясніть її сутність.
8. У чому полягає різниця між асоціативним законом пластичної течії сипкого матеріалу та неасоціативним?
9. Дайте визначення скалярного асоціативного множника або коефіцієнта пластичності.
10. Що таке тензор пробних напружень, необхідність його використання в алгоритмі зворотного відображення для розв'язання задачі пластичності сипкого матеріалу?
11. Для чого потрібне представлення тензорів у вигляді векторів? Чим воно досягається?
12. Опишіть особливості застосування метода Ньютона в алгоритмі зворотного відображення.
13. Опишіть основні етапи неявного алгоритму розв'язання пружно-пластичної задачі сипкого матеріалу.
14. Опишіть оператори та функції, що входять у **geo**-файл програми **Gmsh** для побудови тривимірної геометрії чверті конуса (основні функції **Gmsh**).
15. Яким чином виконується дискретизація тривимірної фігури у про-

грамі **Gmsh** та здійснюється визначення номерів поверхонь для задання ГУ?

16. Наведіть перелік вихідних даних для розв'язання задачі пружно-пластичності поведінки сипкого матеріалу.

17. Опишіть порядок задання граничних умов у файлі **P1_RMA_DP.xmcd**.

18. Опишіть основні етапи розв'язання задачі пружно-пластичності сипкого матеріалу.

19. Охарактеризуйте структуру файла формату **Tecplot** для візуалізації результатів розрахунків з використанням тетраедричних СЕ на прикладі задачі пластичності сипкого матеріалу.

20. Опишіть порядок візуалізації результатів розрахунків задачі пластичності сипкого матеріалу в програмі **ParaView**.

Додаток А. Приклади програмних кодів Mathcad для розв'язання нелінійних задач МСС

А.1. Нелінійна нестационарна задача теплопровідності

Програмний код **Trans_heat_cond_NL.xmcd** розроблено за математичною постановкою та числовою методикою розв'язання задачі, що наведена в розділі 1 (див. підрозділи 1.1–1.3), та супроводжується необхідними коментарями.

Файл Trans_heat_cond_NL.xmcd

нестационарна нелінійна теплопровідність 3D задача

У коді видаляються зайві вузли, що пише програма Gmsh у файл *.msh при побудові 3D геометрії інструментами Gmsh, наприклад, Extrude

ORIGIN ≡ 1 Індексація масивів з 1

M := 4 кількість вузлів в тетраедному скінченному елементі

Зчитування номерів і координат вузлів дискретизованої в програмі Gmsh моделі фланця з файлу Cyl.msh (без створення додаткових файлів)

Спочатку текстовий файл Cyl.msh треба дуже просто відрегувати, а саме записати в перший його рядок таку послідовність цифр: 11 22 33 44 55 66 77 88 99 100

Це необхідно для того, щоб провести ініціалізацію матриці в яку буде зчитуватися файл Cyl.msh

Зчитування текстового файлу Cyl.msh в матрицю A

A :=



Cyl.msh

Визначення кількості глобальних вузлів дискретизованої моделі

Nnod_gl := A_{6,1} = 1218 кількість глобальних вузлів

Запис координат глобальних вузлів в матрицю Gmsh_nodes з матриці A

```
Gmsh_nodes := for i ∈ 1..Nnod_gl
               | Gmsh_nodesi,1 ← i
               | Gmsh_nodesi,2 ← A6+i,2
               | Gmsh_nodesi,3 ← A6+i,3
               | Gmsh_nodesi,4 ← A6+i,4
               Gmsh_nodes
```

Визначення кількості рядків в матриці A

$NA := \text{rows}(A) = 7834$

Запис номерів глобальних вузлів по елементах в матрицю El_nod з матриці A

```
El_nod := | k ← 0
           | for i ∈ 1..NA
           |   if  $A_{i,2} = 4$ 
           |     k ← k + 1
           |     Gmsh_elemk,1 ←  $A_{i,6}$ 
           |     Gmsh_elemk,2 ←  $A_{i,7}$ 
           |     Gmsh_elemk,3 ←  $A_{i,8}$ 
           |     Gmsh_elemk,4 ←  $A_{i,9}$ 
           | Gmsh_elem
           |
           | кількість скінчених елементів
```

Матриця номерів вузлів скінчених елементів

Визначення кількості рядків в матриці El_nod - кількості скінчених елементів в дискретизованій моделі

$nEl := \text{rows}(El_nod) = 4804$ кількість скінчених елементів

Функція яка визначає номери вузлів (точок) які не є вузлами розрахункової сітки (тобто не використовуються в CE), а виникають при побудові 3D геометрії в програмі Gmsh за допомогою команди Extrude.

```
Nod_Del := | L ← 0
           | for i ∈ 1..Nnod_gl
           |   pL ← 0
           |   for j ∈ 1..nEl
           |     for k ∈ 1..4
           |       pL ← 1 if  $El\_nod_{j,k} = i$ 
           |   if pL = 0
           |     L ← L + 1
           |     Nod_DelL ← i
           | Nod_Del
```

$Nod_Del = 0$

$N_Del := \text{rows}(\text{Nod_Del}) = 0$ Кількість зайвих вузлів, що не використовуються в СЕ

Сортування

$\text{Nod_Del} := \begin{cases} \text{sort}(\text{Nod_Del}) & \text{if } N_Del > 0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$

$\text{Nod_Del} = 0$

Видалення вузлів або стискання номерів вузлів, що не використовуються в розрахунковій сітці

```
Gmsh_nodes :=
  for i ∈ 1..N_Del
    if N_Del > 0
      n ← Nod_Deli
      if n < Nnod_gl
        for j ∈ n + 1..Nnod_gl
          for k ∈ 1..M
            Gmsh_nodesj-1,k ← Gmsh_nodesj,k
          for k ∈ i + 1..N_Del      if i < N_Del
            Nod_Delk ← Nod_Delk - 1
        Gmsh_nodes
```

$\text{Nnod_gl} := \text{Nnod_gl} - N_Del = 1218$

Запис глобальних вузлів дискретизованої моделі фланця у матрицю XYZgl

```
XYZgl :=
  for i ∈ 1..Nnod_gl
    XYZgli,1 ← Gmsh_nodesi,2
    XYZgli,2 ← Gmsh_nodesi,3
    XYZgli,3 ← Gmsh_nodesi,4
  XYZgl
```

... Матриця глобальних вузлів

$\text{Nnod_gl} = 1218$

Перекодування номерів вузлів по тетраедричних елементах

```
El_nod :=
  for j ∈ 1..nEl
    for k ∈ 1..4
      ik ← El_nodj,k
      for i ∈ 1..Nnod_gl
        if ik = Gmsh_nodesi,1
          il ← i
          break
      El_nodj,k ← il
    El_nod
```

Запис номерів глобальних вузлів по поверхневих елементах в матрицю *Area2_nod_El* з матриці *A*

```
Area2_nod_El := | k ← 0
                  for i ∈ 1..NA
                    if Ai,2 = 2
                      k ← k + 1
                      Area_elemk,1 ← Ai,1
                      Area_elemk,2 ← Ai,2
                      Area_elemk,3 ← Ai,3
                      Area_elemk,4 ← Ai,4
                      Area_elemk,5 ← Ai,5
                      Area_elemk,6 ← Ai,6
                      Area_elemk,7 ← Ai,7
                      Area_elemk,8 ← Ai,8
                  Area_elem
```

N_Area2 := rows(*Area2_nod_El*) = 1676 Кількість рядків в матриці

Перекодування номерів вузлів по трикутних елементах на поверхнях

```
Area2_nod_El := | for j ∈ 1..N_Area2
                  for k ∈ 6..8
                    ik ← Area2_nod_Elj,k
                    for i ∈ 1..Nnod_gl
                      if ik = Gmsh_nodesi,1
                        i1 ← i
                        break
                    Area2_nod_Elj,k ← i1
                  Area2_nod_El
```

Нижня основа циліндра - ГУ III роду задані на поверхні N 1

Верхня основа циліндра - ГУ III роду задані на поверхні N 21

Тобто з матриці *Area2_nod_El* треба отримати інформацію про трикутні СЕ на поверхнях з NN 1, 21. Ця інформація включає номери глобальних вузлів.

1.1. Визначення номерів глобальних вузлів трикутних елементів поверхні № 1 з матриці Area2_nod_El

функція

```

El_nod_(k) :=
  row ← 0
  for i ∈ 1..N_Area2
    j ← Area2_nod_Eli,5
    if j = k
      row ← row + 1
      for l ∈ 1..3
        El_nodrow,l ← Area2_nod_Eli,5+l
  El_nod

```

El_nod1 := El_nod_(1) тут 1 це номер поверхні

N_El_side1 := rows(El_nod1) = 165 кількість трикутних елементів на поверхні 1

1.2. Запис номерів вузлів елементів на стороні № 1 у вектор (без повторення однакових номерів)

функція

```

Nod_side(N_El_side, El_nod) :=
  k ← 0
  for i ∈ 1..N_El_side
    if i = 1
      for j ∈ 1..3
        Nod_side-k+j ← El_nodi,j
      k ← k + 3
    if i > 1
      for j ∈ 1..3
        n ← El_nodi,j
        j0 ← -1
        for l ∈ 1..k
          j0 ← 0 if Nod_side-l = n
        if j0 = -1
          k ← k + 1
          Nod_side-k ← n
      p ← 0
  Nod_side_

```

$Nod_side1 := Nod_side(N_El_side1, El_nod1)$

$n_s1 := rows(Nod_side1) = 100$

3.1 Визначення номерів глобальних вузлів трикутних елементів поверхні № 21 з матриці $Area2_nod_El$

$El_nod3 := El_nod_ (21)$ тут 21 це номер поверхні

$N_El_side3 := rows(El_nod3) = 165$ кількість трикутних елементів на поверхні 21

4.2. Запис номерів вузлів елементів на стороні № 21 у вектор (без повторення однакових номерів)

$Nod_side3 := Nod_side(N_El_side3, El_nod3)$

$n_s3 := rows(Nod_side3) = 100$

Тепер ці дані треба зв'язати зі сторонами тетраедричних CE

функція, яка встановлює зв'язок поверхневих трикутників з номерами тетраедричних CE та номерами їх сторін та записує відповідні коефіцієнти конвективних умов

```
BC3_Side(El_nod_, N_El_side,  $\alpha$ , Tp) :=
  n ← 0
  for i ∈ 1..N_El_side
    e1 ← El_nod_-,1
    e2 ← El_nod_-,2
    e3 ← El_nod_-,3
    for j ∈ 1..nEl
      el1 ← El_nod_-,1
      el2 ← El_nod_-,2
      el3 ← El_nod_-,3
      el4 ← El_nod_-,4
      if (el1 = e1 ∨ el1 = e2 ∨ el1 = e3) ∧ (el2 = e1 ∨ el2 = e2 ∨ el2 = e3) ∧ (el3 = e1 ∨ el3 = e2 ∨ el3 = e3)
        n ← n + 1
        BC3_n,1 ← j
        BC3_n,2 ← 1
        BC3_n,3 ←  $\alpha$ 
        BC3_n,4 ← Tp
        break
      if (el2 = e1 ∨ el2 = e2 ∨ el2 = e3) ∧ (el3 = e1 ∨ el3 = e2 ∨ el3 = e3) ∧ (el4 = e1 ∨ el4 = e2 ∨ el4 = e3)
        n ← n + 1
        BC3_n,1 ← j
        BC3_n,2 ← 2
        BC3_n,3 ←  $\alpha$ 
        BC3_n,4 ← Tp
        break
      if (el1 = e1 ∨ el1 = e2 ∨ el1 = e3) ∧ (el3 = e1 ∨ el3 = e2 ∨ el3 = e3) ∧ (el4 = e1 ∨ el4 = e2 ∨ el4 = e3)
```

```

      n ← n + 1
      BC3n,1 ← j
      BC3n,2 ← 3
      BC3n,3 ← α
      BC3n,4 ← Tp
      break
    if (e1 = e1 ∨ e1 = e2 ∨ e1 = e3) ∧ (e2 = e1 ∨ e2 = e2 ∨ e2 = e3) ∧ (e4 = e1 ∨ e4 = e2 ∨ e4 = e3)
      n ← n + 1
      BC3n,1 ← j
      BC3n,2 ← 4
      BC3n,3 ← α
      BC3n,4 ← Tp
      break
    p ← 0
    f ← 0
  BC3

```

Задання граничних умов ІІІ роду на сторонах фланця

Повехні циліндра з номерами 1, 21, на яких задані граничні умови ІІІ роду

Поверхня № 1 - торець

$\alpha_1 := 10$ $Tp_1 := 35$

$BC3_Side1 := BC3_Side(E1_nod1, N_E1_side1, \alpha_1, Tp_1)$

Поверхня № 3 - внутрішня сторона 1

$\alpha_3 := 35$ $Tp_3 := 250$

$BC3_Side3 := BC3_Side(E1_nod3, N_E1_side3, \alpha_3, Tp_3)$

$BC3_Side16 := BC3_Side(E1_nod16, N_E1_side16, \alpha_1, Tp_1)$

Формування глобальної матриці $E1_BC3$ для ГУ ІІІ роду по елементах

В матриці $E1_BC3$ перші 4 стовпці це сторони тетраедра ijk (1), jkl (2), ikl (3), ijl (4), в яких задано ГУ 3-го роду (може бути 0 або 3), 5-й - номер СЕ, 6-й, 7-й - значення α і Tp на 1-й стороні СЕ, відповідно, 8-й, 9-й - значення α і Tp на 2-й стороні СЕ, відповідно, 10-й, 11-й - значення α і Tp на 3-й стороні СЕ, відповідно, 12-й, 13-й - значення α і Tp на 4-й стороні СЕ, відповідно,

```

El_BC3 := for el ∈ 1..nEl
| El_BC3el,5 ← el
| for j ∈ 1..N_El_side1
| | if BC3_Side1j,1 = el
| | | if BC3_Side1j,2 = 1
| | | | El_BC3el,1 ← 3
| | | | El_BC3el,6 ← α1
| | | | El_BC3el,7 ← Tp1
| | | if BC3_Side1j,2 = 2
| | | | El_BC3el,2 ← 3
| | | | El_BC3el,8 ← α1
| | | | El_BC3el,9 ← Tp1
| | | if BC3_Side1j,2 = 3
| | | | El_BC3el,3 ← 3
| | | | El_BC3el,10 ← α1
| | | | El_BC3el,11 ← Tp1
| | | if BC3_Side1j,2 = 4
| | | | El_BC3el,4 ← 3
| | | | El_BC3el,12 ← α1
| | | | El_BC3el,13 ← Tp1
| | for j ∈ 1..N_El_side3
| | | if BC3_Side3j,1 = el
| | | | if BC3_Side3j,2 = 1
| | | | | El_BC3el,1 ← 3
| | | | | El_BC3el,6 ← α3
| | | | | El_BC3el,7 ← Tp3
| | | | if BC3_Side3j,2 = 2
| | | | | El_BC3el,2 ← 3
| | | | | El_BC3el,8 ← α3

```

```

| El_BC3el,9 ← Tp3
| if BC3_Side3j,2 = 3
|   | El_BC3el,3 ← 3
|   | El_BC3el,10 ← α3
|   | El_BC3el,11 ← Tp3
|   if BC3_Side3j,2 = 4
|     | El_BC3el,4 ← 3
|     | El_BC3el,12 ← α3
|     | El_BC3el,13 ← Tp3
| for j ∈ 1..N_El_side16
|   if BC3_Side16j,1 = el
|     if BC3_Side16j,2 = 1
|       | El_BC3el,1 ← 3
|       | El_BC3el,6 ← α1
|       | El_BC3el,7 ← Tp1
|     if BC3_Side16j,2 = 2
|       | El_BC3el,2 ← 3
|       | El_BC3el,8 ← α1
|       | El_BC3el,9 ← Tp1
|     if BC3_Side16j,2 = 3
|       | El_BC3el,3 ← 3
|       | El_BC3el,10 ← α1
|       | El_BC3el,11 ← Tp1
|     if BC3_Side16j,2 = 4
|       | El_BC3el,4 ← 3
|       | El_BC3el,12 ← α1
|       | El_BC3el,13 ← Tp1
| xxx ← 0
| El_BC3

```

Фізичні властивості

Теплопровідність та її похідна за температурою

$$\lambda(t) := 159.218 \cdot e^{-0.001116 \cdot t} \quad d\lambda(t) := -0.177687288 \cdot e^{-0.001116 \cdot t}$$

$$c_p(t) := 712.2 + 2.933 \cdot 10^{-7} \cdot t^3 - 1.444 \cdot 10^{-3} \cdot t^2 + 2.406 \cdot t \quad \text{масова теплоємність}$$

$$\rho(t) := 1853 - 5.453 \cdot 10^{-5} \cdot t^2 - 0.127 \cdot t \quad \text{густина}$$

$$\lambda_{-}(t) := 0.175 \quad d\lambda_{-}(t) := 0 \quad c_{p_{-}}(t) := 1313 \quad \rho_{-}(t) := 1600 \quad \text{Для лінійної задачі}$$

$$h(tp) := \int_0^{tp} c_p(t) \cdot \rho(t) dt \quad \text{- Обємна ентальпія, Вт/м}^3$$

Густина внутрішнього джерела теплоти в матеріалі фланця

$$q_v := 250000 \quad \text{Вт/м}^3$$

Розв'язання задачі

1. Функції

Обєм CE

$$V_{xyz} := \frac{1}{6} \cdot \left| \begin{pmatrix} 1 & XYZ_{1,1} & XYZ_{1,2} & XYZ_{1,3} \\ 1 & XYZ_{2,1} & XYZ_{2,2} & XYZ_{2,3} \\ 1 & XYZ_{3,1} & XYZ_{3,2} & XYZ_{3,3} \\ 1 & XYZ_{4,1} & XYZ_{4,2} & XYZ_{4,3} \end{pmatrix} \right|$$

Вектори для визначення матриці градієнтів

$$a(XYZ, i) := \begin{cases} \begin{pmatrix} XYZ_{2,1} & XYZ_{2,2} & XYZ_{2,3} \\ XYZ_{3,1} & XYZ_{3,2} & XYZ_{3,3} \\ XYZ_{4,1} & XYZ_{4,2} & XYZ_{4,3} \end{pmatrix} & \text{if } i = 1 \\ \begin{pmatrix} XYZ_{1,1} & XYZ_{1,2} & XYZ_{1,3} \\ XYZ_{3,1} & XYZ_{3,2} & XYZ_{3,3} \\ XYZ_{4,1} & XYZ_{4,2} & XYZ_{4,3} \end{pmatrix} & \text{if } i = 2 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} & \left| \begin{pmatrix} XYZ_{1,1} & XYZ_{1,2} & XYZ_{1,3} \\ XYZ_{2,1} & XYZ_{2,2} & XYZ_{2,3} \\ XYZ_{4,1} & XYZ_{4,2} & XYZ_{4,3} \end{pmatrix} \right| & \text{if } i = 3 \\ & \left| \begin{pmatrix} XYZ_{1,1} & XYZ_{1,2} & XYZ_{1,3} \\ XYZ_{3,1} & XYZ_{3,2} & XYZ_{3,3} \\ XYZ_{3,1} & XYZ_{3,2} & XYZ_{3,3} \end{pmatrix} \right| & \text{if } i = 4 \end{aligned}$$

$$b(XYZ,i) := \begin{aligned} & - \left| \begin{pmatrix} 1 & XYZ_{2,2} & XYZ_{2,3} \\ 1 & XYZ_{3,2} & XYZ_{3,3} \\ 1 & XYZ_{4,2} & XYZ_{4,3} \end{pmatrix} \right| & \text{if } i = 1 \\ & \left| \begin{pmatrix} 1 & XYZ_{1,2} & XYZ_{1,3} \\ 1 & XYZ_{3,2} & XYZ_{3,3} \\ 1 & XYZ_{4,2} & XYZ_{4,3} \end{pmatrix} \right| & \text{if } i = 2 \\ & - \left| \begin{pmatrix} 1 & XYZ_{1,2} & XYZ_{1,3} \\ 1 & XYZ_{2,2} & XYZ_{2,3} \\ 1 & XYZ_{4,2} & XYZ_{4,3} \end{pmatrix} \right| & \text{if } i = 3 \\ & \left| \begin{pmatrix} 1 & XYZ_{1,2} & XYZ_{1,3} \\ 1 & XYZ_{2,2} & XYZ_{2,3} \\ 1 & XYZ_{3,2} & XYZ_{3,3} \end{pmatrix} \right| & \text{if } i = 4 \end{aligned}$$

$$c(XYZ,i) := \begin{aligned} & - \left| \begin{pmatrix} XYZ_{2,1} & 1 & XYZ_{2,3} \\ XYZ_{3,1} & 1 & XYZ_{3,3} \\ XYZ_{4,1} & 1 & XYZ_{4,3} \end{pmatrix} \right| & \text{if } i = 1 \\ & \left| \begin{pmatrix} XYZ_{1,1} & 1 & XYZ_{1,3} \\ XYZ_{3,1} & 1 & XYZ_{3,3} \\ XYZ_{4,1} & 1 & XYZ_{4,3} \end{pmatrix} \right| & \text{if } i = 2 \\ & - \left| \begin{pmatrix} XYZ_{1,1} & 1 & XYZ_{1,3} \\ XYZ_{2,1} & 1 & XYZ_{2,3} \\ XYZ_{4,1} & 1 & XYZ_{4,3} \end{pmatrix} \right| & \text{if } i = 3 \\ & \left| \begin{pmatrix} XYZ_{1,1} & 1 & XYZ_{1,3} \\ XYZ_{2,1} & 1 & XYZ_{2,3} \\ XYZ_{3,1} & 1 & XYZ_{3,3} \end{pmatrix} \right| & \text{if } i = 4 \end{aligned}$$

$$d(\text{XYZ}, i) := \begin{cases} - \begin{vmatrix} \text{XYZ}_{2,1} & \text{XYZ}_{2,2} & 1 \\ \text{XYZ}_{3,1} & \text{XYZ}_{3,2} & 1 \\ \text{XYZ}_{4,1} & \text{XYZ}_{4,2} & 1 \end{vmatrix} & \text{if } i = 1 \\ \begin{vmatrix} \text{XYZ}_{1,1} & \text{XYZ}_{1,2} & 1 \\ \text{XYZ}_{3,1} & \text{XYZ}_{3,2} & 1 \\ \text{XYZ}_{4,1} & \text{XYZ}_{4,2} & 1 \end{vmatrix} & \text{if } i = 2 \\ - \begin{vmatrix} \text{XYZ}_{1,1} & \text{XYZ}_{1,2} & 1 \\ \text{XYZ}_{2,1} & \text{XYZ}_{2,2} & 1 \\ \text{XYZ}_{4,1} & \text{XYZ}_{4,2} & 1 \end{vmatrix} & \text{if } i = 3 \\ \begin{vmatrix} \text{XYZ}_{1,1} & \text{XYZ}_{1,2} & 1 \\ \text{XYZ}_{2,1} & \text{XYZ}_{2,2} & 1 \\ \text{XYZ}_{3,1} & \text{XYZ}_{3,2} & 1 \end{vmatrix} & \text{if } i = 4 \end{cases}$$

Матриця градієнтів CE

$$B(\text{XYZ}) := \frac{1}{6 \cdot V(\text{XYZ})} \cdot \begin{pmatrix} b(\text{XYZ}, 1) & b(\text{XYZ}, 2) & b(\text{XYZ}, 3) & b(\text{XYZ}, 4) \\ c(\text{XYZ}, 1) & c(\text{XYZ}, 2) & c(\text{XYZ}, 3) & c(\text{XYZ}, 4) \\ d(\text{XYZ}, 1) & d(\text{XYZ}, 2) & d(\text{XYZ}, 3) & d(\text{XYZ}, 4) \end{pmatrix}$$

Матриця теплопровідності ізотропного середовища

$$D(\lambda) := \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

Матриця демфірування

$$C(\text{XYZ}, c_p, \rho) := c_p \cdot \rho \cdot \frac{V(\text{XYZ})}{20} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Площа граней CE

```

S(XYZ,is) := if is = 1
              | i ← 1
              | j ← 2
              | k ← 3
              if is = 2
              | i ← 2
              | j ← 3
              | k ← 4
              if is = 3
              | i ← 1
              | j ← 3
              | k ← 4
              if is = 4
              | i ← 1
              | j ← 2
              | k ← 4
              g1 ←  $\begin{vmatrix} XYZ_{i,2} - XYZ_{k,2} & XYZ_{i,3} - XYZ_{k,3} \\ XYZ_{j,2} - XYZ_{k,2} & XYZ_{j,3} - XYZ_{k,3} \end{vmatrix}$ 
              g2 ←  $-\begin{vmatrix} XYZ_{i,1} - XYZ_{k,1} & XYZ_{i,3} - XYZ_{k,3} \\ XYZ_{j,1} - XYZ_{k,1} & XYZ_{j,3} - XYZ_{k,3} \end{vmatrix}$ 
              g3 ←  $\begin{vmatrix} XYZ_{i,1} - XYZ_{k,1} & XYZ_{i,2} - XYZ_{k,2} \\ XYZ_{j,1} - XYZ_{k,1} & XYZ_{j,2} - XYZ_{k,2} \end{vmatrix}$ 
               $\frac{\sqrt{g1^2 + g2^2 + g3^2}}{2}$ 

```

Навантаження CE за рахунок внутрішніх джерел тепоти

$$f_{qv}(qv,V,XYZ) := \frac{qv \cdot V(XYZ)}{4} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Граничні умови III роду - додаток до матриці жорсткості на стороні ijk - 123 - сторона 1

$$k\alpha_{123}(XYZ, S, \alpha) := \frac{\alpha \cdot S(XYZ, 1)}{12} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Граничні умови III роду - додаток до матриці жорсткості на стороні jkl - 234 - сторона 2

$$k\alpha_{234}(XYZ, S, \alpha) := \frac{\alpha \cdot S(XYZ, 2)}{12} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Граничні умови III роду - додаток до матриці жорсткості на стороні ikl - 134 - сторона 3

$$k\alpha_{134}(XYZ, S, \alpha) := \frac{\alpha \cdot S(XYZ, 3)}{12} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Граничні умови III роду - додаток до матриці жорсткості на стороні ijl - 124 - сторона 4

$$k\alpha_{124}(XYZ, S, \alpha) := \frac{\alpha \cdot S(XYZ, 4)}{12} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

--- Граничні умови III роду - додаток до **вільного члена** на стороні ijk - 123 - сторона 1 -----

$$f\alpha_{123}(XYZ, S, \alpha, T_p) := \frac{\alpha \cdot T_p \cdot S(XYZ, 1)}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Граничні умови III роду - додаток до **вільного члена** на стороні jkl - 234 - сторона 2

$$f_{\alpha_234}(XYZ, S, \alpha, T_p) := \frac{\alpha \cdot T_p \cdot S(XYZ, 2)}{3} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Граничні умови III роду - додаток до **вільного члена** на стороні ikl - 134 - сторона 3

$$f_{\alpha_134}(XYZ, S, \alpha, T_p) := \frac{\alpha \cdot T_p \cdot S(XYZ, 3)}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Граничні умови III роду - додаток до **вільного члена** на стороні ijl - 124 - сторона 4

$$f_{\alpha_124}(XYZ, S, \alpha, T_p) := \frac{\alpha \cdot T_p \cdot S(XYZ, 4)}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Обнулення глобальної матриці та вектора вільних членів

i := 1..Nnod_gl

$\underline{\underline{F}}_i := 0$

j := 1..Nnod_gl

$\underline{\underline{K}}_{i,j} := 0$

Крок інтегрування за часом

$\Delta\tau := 210$

Кількість кроків за часом

N τ := 1

2.1. Функція формування глобальної матриці СЛАР

Функція формування глобальної матриці жорсткості K_λ за умови $\lambda=1$

```

K_λ := for k ∈ 1..nEl
      for i ∈ 1..M
        j ← El_nodk,i
        XYZi,1 ← XYZglj,1
        XYZi,2 ← XYZglj,2
        XYZi,3 ← XYZglj,3
        k_λ ← B(XYZ)T · D(1) · B(XYZ) · V(XYZ)
        for i ∈ 1..M
          igl ← El_nodk,i
          for j ∈ 1..M
            jgl ← El_nodk,j
            Kigl,jgl ← Kigl,jgl + k_λi,j
      K

```

Функція формування глобальної матриці демфірування K_c за умови $sr=p=1$

```

K_c := for k ∈ 1..nEl
      for i ∈ 1..M
        j ← El_nodk,i
        XYZi,1 ← XYZglj,1
        XYZi,2 ← XYZglj,2
        XYZi,3 ← XYZglj,3
        C_El ←  $\frac{C(XYZ,1,1)}{\Delta\tau}$ 
        for i ∈ 1..M
          igl ← El_nodk,i
          for j ∈ 1..M
            jgl ← El_nodk,j
            Kigl,jgl ← Kigl,jgl + C_Eli,j
      K

```

Функція формування глобальної матриці зовнішнього конвективного теплообміну K_{α} за умови заданого α

```

K_α := for k ∈ 1..nEl
    for i ∈ 1..M
        j ← El_nodk,i
        XYZi,1 ← XYZgl,j,1
        XYZi,2 ← XYZgl,j,2
        XYZi,3 ← XYZgl,j,3
    for i ∈ 1..M
        for j ∈ 1..M
            k_Elαi,j ← 0
    for i ∈ 1..M
        if i = 1 ∧ El_BC3k,i = 3
            α ← El_BC3k,6
            k_Elα ← k_Elα + kα123(XYZ, S, α)
        if i = 2 ∧ El_BC3k,i = 3
            α ← El_BC3k,8
            k_Elα ← k_Elα + kα234(XYZ, S, α)
        if i = 3 ∧ El_BC3k,i = 3
            α ← El_BC3k,10
            k_Elα ← k_Elα + kα134(XYZ, S, α)
        if i = 4 ∧ El_BC3k,i = 3
            α ← El_BC3k,12
            k_Elα ← k_Elα + kα124(XYZ, S, α)
    for i ∈ 1..M
        igl ← El_nodk,i
        for j ∈ 1..M
            jgl ← El_nodk,j
            Kigl,jgl ← Kigl,jgl + k_Elαi,j
K

```

2.2 Функція формування глобального вектора СПАР

```

F_(Δτ, T, T_old) := (
  for k ∈ 1..nEl
    for i ∈ 1..M
      j ← El_nodk,i
      XYZi,1 ← XYZglj,1
      XYZi,2 ← XYZglj,2
      XYZi,3 ← XYZglj,3
    for i ∈ 1..M
      f_Eli ← 0
    for i ∈ 1..M
      if i = 1 ∧ El_BC3k,i = 3
        α ← El_BC3k,6
        Tp ← El_BC3k,7
        f_El ← f_El + fα123(XYZ, S, α, Tp)
      if i = 2 ∧ El_BC3k,i = 3
        α ← El_BC3k,8
        Tp ← El_BC3k,9
        f_El ← f_El + fα234(XYZ, S, α, Tp)
      if i = 3 ∧ El_BC3k,i = 3
        α ← El_BC3k,10
        Tp ← El_BC3k,11
        f_El ← f_El + fα134(XYZ, S, α, Tp)
      if i = 4 ∧ El_BC3k,i = 3
        α ← El_BC3k,12
        Tp ← El_BC3k,13
        f_El ← f_El + fα124(XYZ, S, α, Tp)
      f_El ← f_El + f_qv(qv, V, XYZ)
    for i ∈ 1..M
      igl ← El_nodk,i
      Figl ← Figl + f_Eli

```



```

    for i ∈ 1..Nnod_gl
        λgl,i ← λ(Ti)·Ti
        Hgl,i ← h(Ti) - h(Told,i)
        fλ ← Kλ·λgl
        fc ← Kc·Hgl
        fα ← Kα·T
    for i ∈ 1..Nnod_gl
        Fi ← Fi - fα,i - fλ,i - fc,i
    F

```

Розв'язання лінеаризованої за методом Ньютона СЛАР

```

Ttop := for i ∈ 1..Nnod_gl
    Ti ← Tp1
    Told,i ← Tp1
    Kλ ← Kλ
    Kc ← Kc
    Kα ← Kα
    for k ∈ 1..Nτ
        for j ∈ 1..6
            for i ∈ 1..Nnod_gl
                λgl,i ← λ(Ti) + dλ(Ti)·Ti
                Cpgl,i ← cp(Ti)·ρ(Ti)
            for i ∈ 1..Nnod_gl
                for il ∈ 1..Nnod_gl
                    Kλ,i,il ← Kλ-i,il·λgl,il
                    Kc,i,il ← Kc-i,il·Cpgl,il
                K ← Kλ + Kc + Kα
                F ← F-(Δτ, T, Told)
                δT ← Isolve(K, F)
                T ← T + δT
            Told ← T
    T

```

Tp1 - початкова температура

+

$i := 1..Nnod_gl$

$T_{i,1} := T_top_i$

Розв'язок - поле температури T

Обчислення компонент густини теплового потоку (q_x, q_y, q_z) по елементах

```

qEl := for k ∈ 1..nEl
      | St ← 0
      | for i ∈ 1..M
      |   | igl ← El_nodk,i
      |   | T_Eli ← Tigl
      |   | St ← St + T_Eli
      | TEl ←  $\frac{St}{M}$ 
      | for i ∈ 1..M
      |   | j ← El_nodk,i
      |   | XYZi,1 ← XYZgl,j,1
      |   | XYZi,2 ← XYZgl,j,2
      |   | XYZi,3 ← XYZgl,j,3
      | q_El ← -D(λ(TEl))·B(XYZ)·T_El
      | for i ∈ 1..3
      |   | qElk,i ← q_Eli
      | qEl

```

Обчислення компонент густини теплового потоку (q_x, q_y, q_{sum}) у вузлах CE

```

q_node := for i ∈ 1..Nnod_gl
            k_cout ← 0
            qx ← 0
            qy ← 0
            qz ← 0
            for k ∈ 1..nEl
                for j ∈ 1..M
                    node ← El_nodk,j
                    if node = i
                        k_cout ← k_cout + 1
                        qx ← qx + qElk,1
                        qy ← qy + qElk,2
                        qz ← qz + qElk,3
                    if k_cout > 0
                        qx ←  $\frac{qx}{k\_cout}$ 
                        qy ←  $\frac{qy}{k\_cout}$ 
                        qz ←  $\frac{qz}{k\_cout}$ 
                q_nodei,1 ← qx
                q_nodei,2 ← qy
                q_nodei,3 ← qz
                q_nodei,4 ←  $\sqrt{qx^2 + qy^2 + qz^2}$ 
            q_node

```

Перезапис номерів вузлів CE

```

El_nod3 := for k ∈ 1..nEl
            for j ∈ 1..M
                El_nod3k,j ← El_nodk,j
            El_nod3

```

Формування файлу результатів Result_1

```

Result_1 := for i ∈ 1..Nnod_gl
            |
            | Result_1,i,1 ← XYZgl,i,1
            | Result_1,i,2 ← XYZgl,i,2
            | Result_1,i,3 ← XYZgl,i,3
            | Result_1,i,4 ← Ti
            | Result_1,i,5 ← q_node,i,1
            |-----
            | Result_1,i,6 ← q_node,i,2
            | Result_1,i,7 ← q_node,i,3
            | Result_1,i,8 ← q_node,i,4
            | Result_1

```

Tmin,Tmax

```

Tmin_max := Tmin ← 106
            | for i ∈ 1..Nnod_gl
            |   Tmin ← Ti if Tmin > Ti
            | Tmax ← -106
            | for i ∈ 1..Nnod_gl
            |   Tmax ← Ti if Tmax < Ti
            | Tmin_max1 ← Tmin
            | Tmin_max2 ← Tmax
            | Tmin_max

```

Запис файлів результатів



Result_1.dat

Result_1



NNodes_Elements.dat

El_nod3

A.2. Нелінійна нестационарна задача тепло-електропровідності

Програмний код **Trans_heat_elec_cond_NL.xmcd** розроблено за математичною постановкою та числовою методикою розв'язання задачі, що наведена в розділі 2 (див. підрозділи 2.1–2.3), та супроводжується необхідними коментарями.

файл Trans_heat_elec_cond_NL.xmcd

нестационарна нелінійна тепло-електропровідність 3D задача

В коді видаляються зайві вузли, що пише програма Gmsh у файл *.msh при побудові 3D геометрії інструментами Gmsh, наприклад, Extrude

ORIGIN = 1 Індикація масивів з 1 +

M := 4 кількість вузлів в тетраедному скінченному елементі

Зчитування номерів і координат вузлів дискретизованої в програмі Gmsh моделі фланця з файлу Cyl.msh (без створення додаткових файлів)

Спочатку текстовий файл Cyl.msh треба дуже просто відрегувати, а саме записати в перший його рядок таку послідовність цифр: 11 22 33 44 55 66 77 88 99 100

Це необхідно для того, щоб провести ініціалізацію матриці в яку буде зчитуватися файл Cyl.msh

Зчитування текстового файлу Cyl.msh в матрицю A

$A :=$



Cyl.msh

Визначення кількості глобальних вузлів дискретизованої моделі

$Nnod_gl := A_{6,1} = 1218$

Запис координат глобальних вузлів в матрицю Gmsh_nodes з матриці A

Gmsh_nodes := for i ∈ 1..Nnod_gl визначення глобальних вузлів
Gmsh_nodes_{i,1} ← i
Gmsh_nodes_{i,2} ← A_{6+i,2}
Gmsh_nodes_{i,3} ← A_{6+i,3}
Gmsh_nodes_{i,4} ← A_{6+i,4}
Gmsh_nodes

Визначення кількості рядків в матриці A

$NA := \text{rows}(A) = 7834$

Запис номерів глобальних вузлів по елементах в матрицю El_nod з матриці A

```
El_nod := | k ← 0
           | for i ∈ 1..NA
           |   if Ai,2 = 4
           |     k ← k + 1
           |     Gmsh_elemk,1 ← Ai,6
           |     Gmsh_elemk,2 ← Ai,7
           |     Gmsh_elemk,3 ← Ai,8
           |     Gmsh_elemk,4 ← Ai,9
           | Gmsh_elem
```

Матриця номерів вузлів скінченних елементів

Визначення кількості рядків в матриці El_nod - кількості скінченних елементів в дискретизованій моделі

$nEl := \text{rows}(El_nod) = 4804$ кількість скінчених елементів

Функція яка визначає номери вузлів (точок) які не є вузлами розрахункової сітки (тобто не використовуються в CE), а виникають при побудові 3D геометрії в програмі Gmsh за допомогою команди Extrude.

```
Nod_Del := | L ← 0
           | for i ∈ 1..Nnod_gl
           |   pL ← 0
           |   for j ∈ 1..nEl
           |     for k ∈ 1..4
           |       pL ← 1 if El_nodj,k = i
           |   if pL = 0
           |     L ← L + 1
           |     Nod_DelL ← i
           | Nod_Del
```

$Nod_Del = 0$

$N_Del := \text{rows}(\text{Nod_Del}) = 0$ Кількість зайвих вузлів, що не використовуються в СЕ

Сортування

$\text{Nod_Del} := \begin{cases} \text{sort}(\text{Nod_Del}) & \text{if } N_Del > 0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$

$\text{Nod_Del} = 0$

Видалення вузлів або стискання номерів вузлів, що не використовуються в розрахунковій сітці

```
Gmsh_nodes :=
  for i ∈ 1..N_Del
    if N_Del > 0
      n ← Nod_Deli
      if n < Nnod_g1
        for j ∈ n + 1..Nnod_g1
          for k ∈ 1..M
            Gmsh_nodesj-1,k ← Gmsh_nodesj,k
          for k ∈ i + 1..N_Del      if i < N_Del
            Nod_Delk ← Nod_Delk - 1
        Gmsh_nodes
```

$Nnod_g1 := Nnod_g1 - N_Del = 1218$

Запис глобальних вузлів дискретизованої моделі фланця у матрицю XYZg1

```
XYZg1 :=
  for i ∈ 1..Nnod_g1
    XYZg1i,1 ← Gmsh_nodesi,2
    XYZg1i,2 ← Gmsh_nodesi,3
    XYZg1i,3 ← Gmsh_nodesi,4
  XYZg1
```

Матриця глобальних вузлів

$Nnod_g1 = 1218$

Перекодування номерів вузлів по тетраедричних елементах

```

El_nod :=
  for j ∈ 1..nEl
    for k ∈ 1..4
      ik ← El_nodj,k
      for i ∈ 1..Nnod_gl
        if ik = Gmsh_nodesi,1
          il ← i
          break
      El_nodj,k ← il
    El_nod

```

Запис номерів глобальних вузлів по поверхневих елементах в матрицю Area2_nod_El з матриці A

```

Area2_nod_El :=
  k ← 0
  for i ∈ 1..NA
    if Ai,2 = 2
      k ← k + 1
      Area_elemk,1 ← Ai,1
      Area_elemk,2 ← Ai,2
      Area_elemk,3 ← Ai,3
      Area_elemk,4 ← Ai,4
      Area_elemk,5 ← Ai,5
      Area_elemk,6 ← Ai,6
      Area_elemk,7 ← Ai,7
      Area_elemk,8 ← Ai,8
    Area_elem

```

N_Area2 := rows(Area2_nod_El) = 1676

Кількість рядків в матриці

Перекодування номерів вузлів по трикутних елементах на поверхнях

```

Area2_nod_El :=
  for j ∈ 1..N_Area2
    for k ∈ 6..8
      ik ← Area2_nod_Elj,k
      for i ∈ 1..Nnod_gl
        if ik = Gmsh_nodesi,1
          i1 ← i
          break
      Area2_nod_Elj,k ← i1
  Area2_nod_El

```

Нижній торець поверхня 1, верхній торець поверхня 21

Бічна поверхня 16

Тобто з матриці Area2_nod_El треба отримати інформацію про трикутні СЕ на поверхнях 1, 16, 21. Ця інформація включає номери глобальних вузлів.

1.1. Визначення номерів глобальних вузлів трикутних елементів поверхні № 16 з матриці Area2_nod_El

функція

```

El_nod_(k) :=
  row ← 0
  for i ∈ 1..N_Area2
    j ← Area2_nod_Eli,5
    if j = k
      row ← row + 1
      for l ∈ 1..3
        El_nodrow,1 ← Area2_nod_Eli,5+l
  El_nod

```

El_nod16 := El_nod_(16) тут 16 це номер
поверхні

N_El_side16 := rows(El_nod16) = 604 кількість трикутних елементів на поверхні 16

1.2. Запис номерів вузлів елементів на стороні № 16 у вектор (без повторення однакових номерів)

функція

```

Nod_side(N_El_side, El_nod) :=
    k ← 0
    for i ∈ 1..N_El_side
        if i = 1
            for j ∈ 1..3
                Nod_side_{k+j} ← El_nod_{i,j}
            k ← k + 3
        if i > 1
            for j ∈ 1..3
                n ← El_nod_{i,j}
                j0 ← -1
                for l ∈ 1..k
                    j0 ← 0 if Nod_side_l = n
                if j0 = -1
                    k ← k + 1
                    Nod_side_k ← n
            p ← 0
    Nod_side_

```

Nod_side16 := Nod_side(N_El_side16, El_nod16)

n_s16 := rows(Nod_side16) = 336

3.1 Визначення номерів глобальних вузлів трикутних елементів поверхні № 1 і 21 з матриці Area2_nod_El

N 1

El_nod1 := El_nod_(1) тут 1 це номер поверхні

N_El_side1 := rows(El_nod1) = 165 кількість трикутних елементів на поверхні 1

4.2. Запис номерів вузлів елементів на стороні № 1 у вектор (без повторення однакових номерів)

Nod_side1 := Nod_side(N_El_side1, El_nod1)

n_s1 := rows(Nod_side1) = 100

N 21

El_nod21 := El_nod_(21) тут 21 це номер поверхні

N_El_side21 := rows(El_nod21) = 165 кількість трикутних елементів на поверхні 21

4.2. Запис номерів вузлів елементів на стороні № 21 у вектор (без повторення однакових номерів)

$Nod_side21 := Nod_side(N_El_side21, El_nod21)$

$n_s21 := rows(Nod_side21) = 100$

На стороні № 1 також задано ГУ I роду $U=0$ для вектора вузлів $Nod_side1U0$ кількістю n_s1U0

$Nod_side1U0 := Nod_side1$

$n_s1U0 := n_s1$

Тепер ці дані треба зв'язати зі сторонами тетраедричних CE

Функція $BC3_Side$, яка встановлює зв'язок поверхневих трикутників з номерами тетраедричних CE та номерами їх сторін та записує відповідні коефіцієнти конвективних умов для ГУ III роду

```
BC3_Side(El_nod_, N_El_side,  $\alpha$ , Tp) :=
  n ← 0
  for i ∈ 1..N_El_side
    e1 ← El_nod_-,1
    e2 ← El_nod_-,2
    e3 ← El_nod_-,3
    for j ∈ 1..nEl
      el1 ← El_nod_-,1
      el2 ← El_nod_-,2
      el3 ← El_nod_-,3
      el4 ← El_nod_-,4
      if (el1 = e1 ∨ el1 = e2 ∨ el1 = e3) ∧ (el2 = e1 ∨ el2 = e2 ∨ el2 = e3) ∧ (el3 = e1 ∨ el3 = e2 ∨ el3 = e3)
        n ← n + 1
        BC3_n,1 ← j
        BC3_n,2 ← 1
        BC3_n,3 ←  $\alpha$ 
        BC3_n,4 ← Tp
        break
      if (el2 = e1 ∨ el2 = e2 ∨ el2 = e3) ∧ (el3 = e1 ∨ el3 = e2 ∨ el3 = e3) ∧ (el4 = e1 ∨ el4 = e2 ∨ el4 = e3)
        n ← n + 1
        BC3_n,1 ← j
        BC3_n,2 ← 2
        BC3_n,3 ←  $\alpha$ 
        BC3_n,4 ← Tp
        break
      if (el1 = e1 ∨ el1 = e2 ∨ el1 = e3) ∧ (el3 = e1 ∨ el3 = e2 ∨ el3 = e3) ∧ (el4 = e1 ∨ el4 = e2 ∨ el4 = e3)
```

123 - сторона 1

234 - сторона 2

134 - сторона 3

<pre> n ← n + 1 BC3_{n,1} ← j BC3_{n,2} ← 3 BC3_{n,3} ← α BC3_{n,4} ← Tp break if (el1 = e1 ∨ el1 = e2 ∨ el1 = e3) ∧ (el2 = e1 ∨ el2 = e2 ∨ el2 = e3) ∧ (el4 = e1 ∨ el4 = e2 ∨ el4 = e3) n ← n + 1 BC3_{n,1} ← j BC3_{n,2} ← 4 BC3_{n,3} ← α BC3_{n,4} ← Tp break p ← 0 f ← 0 </pre>	<div style="border: 1px dashed black; padding: 2px; text-align: center;">124 - сторона 4</div>
--	--

BC3

Функція BC2_Side, яка встановлює зв'язок поверхневих трикутників з номерами тетраедричних СЕ та номерами їх сторін та записує відповідні значення Jn густини сили струму для ГУ II роду

```

BC2_Side(EI_nod_, N_EI_side, Jn) :=
n ← 0
for i ∈ 1..N_EI_side
e1 ← EI_nod_i,1
e2 ← EI_nod_i,2
e3 ← EI_nod_i,3
for j ∈ 1..nEI
el1 ← EI_nod_j,1
el2 ← EI_nod_j,2
el3 ← EI_nod_j,3
el4 ← EI_nod_j,4
if (el1 = e1 ∨ el1 = e2 ∨ el1 = e3) ∧ (el2 = e1 ∨ el2 = e2 ∨ el2 = e3) ∧ (el3 = e1 ∨ el3 = e2 ∨ el3 = e3)
n ← n + 1
BC2n,1 ← j
BC2n,2 ← 1
BC2n,3 ← Jn
break
if (el2 = e1 ∨ el2 = e2 ∨ el2 = e3) ∧ (el3 = e1 ∨ el3 = e2 ∨ el3 = e3) ∧ (el4 = e1 ∨ el4 = e2 ∨ el4 = e3)
n ← n + 1
BC2n,1 ← j
BC2n,2 ← 2
BC2n,3 ← Jn
break
if (el1 = e1 ∨ el1 = e2 ∨ el1 = e3) ∧ (el3 = e1 ∨ el3 = e2 ∨ el3 = e3) ∧ (el4 = e1 ∨ el4 = e2 ∨ el4 = e3)
n ← n + 1
BC2n,1 ← j
BC2n,2 ← 3
BC2n,3 ← Jn
break

```

```

if (e1 = e1 ∨ e1 = e2 ∨ e1 = e3) ∧ (e2 = e1 ∨ e2 = e2 ∨ e2 = e3) ∧ (e4 = e1 ∨ e4 = e2 ∨ e4 = e3)
|
|   n ← n + 1
|   BC2n,1 ← j
|   BC2n,2 ← 4
|   BC2n,3 ← Jn
|   break
|   p ← 0
|   f ← 0
BC2

```

Задання граничних умов III роду на сторонах циліндра

Сторона з номером 16, на якій задано граничні умови III роду

Сторона № 16 - бічна поверхня

$\alpha_1 := 15$ $Tr_1 := 35$

$BC3_Side16 := BC3_Side(EI_nod16, N_EI_side16, \alpha_1, Tr_1)$

$BC3_Side1 := BC3_Side(EI_nod1, N_EI_side1, \alpha_1, Tr_1)$

$BC3_Side21 := BC3_Side(EI_nod21, N_EI_side21, \alpha_1, Tr_1)$

Задання граничних умов II роду на сторонах циліндра

Сторона з номером 21, на якій задано граничні умови II роду

Сторона № 21 - торець

$J_n := 0.1 \cdot 10^6$ густина сили електричного струму, A/m²

$BC2_Side21 := BC2_Side(EI_nod21, N_EI_side21, J_n)$

Формування глобальної матриці EI_BC3 для ГУ III роду по елементах

В матриці EI_BC3 перші 4 стовпці це сторони тетраедра ijk (1), jkl (2), ikl (3), ijl (4), в яких задано ГУ 3-го роду (може бути 0 або 3), 5-й - номер SE, 6-й, 7-й - значення α і Tr на 1-й стороні SE, відповідно, 8-й, 9-й - значення α і Tr на 2-й стороні SE, відповідно, 10-й, 11-й - значення α і Tr на 3-й стороні SE, відповідно, 12-й, 13-й - значення α і Tr на 4-й стороні SE, відповідно,

```

EI_BC3 := for el ∈ 1..nEI
|
|   EI_BC3el,5 ← el
|   for j ∈ 1..N_EI_side16
|       if BC3_Side16j,1 = el

```

```

if BC3_Side16j,1 = el
    if BC3_Side16j,2 = 1
        El_BC3el,1 ← 3
        El_BC3el,6 ← BC3_Side16j,3
        El_BC3el,7 ← BC3_Side16j,4
    if BC3_Side16j,2 = 2
        El_BC3el,2 ← 3
        El_BC3el,8 ← BC3_Side16j,3
        El_BC3el,9 ← BC3_Side16j,4
    if BC3_Side16j,2 = 3
        El_BC3el,3 ← 3
        El_BC3el,10 ← BC3_Side16j,3
        El_BC3el,11 ← BC3_Side16j,4
    if BC3_Side16j,2 = 4
        El_BC3el,4 ← 3
        El_BC3el,12 ← BC3_Side16j,3
        El_BC3el,13 ← BC3_Side16j,4
for j ∈ 1..N_El_side1
    if BC3_Side1j,1 = el
        if BC3_Side1j,2 = 1
            El_BC3el,1 ← 3
            El_BC3el,6 ← BC3_Side1j,3
            El_BC3el,7 ← BC3_Side1j,4
        if BC3_Side1j,2 = 2
            El_BC3el,2 ← 3
            El_BC3el,8 ← BC3_Side1j,3
            El_BC3el,9 ← BC3_Side1j,4
        if BC3_Side1j,2 = 3

```

```

| El_BC3el,3 ← 3
| El_BC3el,10 ← BC3_Side1j,3
| El_BC3el,11 ← BC3_Side1j,4
| if BC3_Side1j,2 = 4
|   | El_BC3el,4 ← 3
|   | El_BC3el,12 ← BC3_Side1j,3
|   | El_BC3el,13 ← BC3_Side1j,4
| for j ∈ 1..N_El_side21
|   if BC3_Side21j,1 = el
|     if BC3_Side21j,2 = 1
|       | El_BC3el,1 ← 3
|       | El_BC3el,6 ← BC3_Side21j,3
|       | El_BC3el,7 ← BC3_Side21j,4
|     if BC3_Side21j,2 = 2
|       | El_BC3el,2 ← 3
|       | El_BC3el,8 ← BC3_Side21j,3
|       | El_BC3el,9 ← BC3_Side21j,4
|     if BC3_Side21j,2 = 3
|       | El_BC3el,3 ← 3
|       | El_BC3el,10 ← BC3_Side21j,3
|       | El_BC3el,11 ← BC3_Side21j,4
|     if BC3_Side21j,2 = 4
|       | El_BC3el,4 ← 3
|       | El_BC3el,12 ← BC3_Side21j,3
|       | El_BC3el,13 ← BC3_Side21j,4
| xxx ← 0
| El_BC3

```

Формування глобальної матриці El_BC2_Jn для ГУ II роду по елементах для Jn

В матриці El_BC2_Jn перші 4 стовпці це сторони тетраедра ijk (1), jkl (2), ikl (3), ijl (4), в яких задано ГУ II роду (може бути 0 або 2), 5-й - номер CE, 6-й - значення Jn на 1-й стороні CE, відповідно, 7-й - значення Jn на 2-й стороні CE, відповідно, 8-й - значення Jn на 3-й стороні CE, відповідно, 9-й - значення Jn на 4-й стороні CE, відповідно,

```
El_BC2_Jn := for el ∈ 1..nEl
               El_BC2_el,5 ← el
               for j ∈ 1..N_El_side1
                 if BC2_Side21_j,1 = el
                   if BC2_Side21_j,2 = 1
                     El_BC2_el,1 ← 2
                     El_BC2_el,6 ← BC2_Side21_j,3
                   if BC2_Side21_j,2 = 2
                     El_BC2_el,2 ← 2
                     El_BC2_el,7 ← BC2_Side21_j,3
                   if BC2_Side21_j,2 = 3
                     El_BC2_el,3 ← 2
                     El_BC2_el,8 ← BC2_Side21_j,3
                   if BC2_Side21_j,2 = 4
                     El_BC2_el,4 ← 2
                     El_BC2_el,9 ← BC2_Side21_j,3
                 xxx ← 0
               El_BC2
```

Фізичні властивості

Теплопровідність та її похідна за температурою

$$\lambda(t) := 159.218 \cdot e^{-0.001116 \cdot t} \quad d\lambda(t) := -0.177687288 \cdot e^{-0.001116 \cdot t}$$

$$c_p(t) := 712.2 + 2.933 \cdot 10^{-7} \cdot t^3 - 1.444 \cdot 10^{-3} \cdot t^2 + 2.406 \cdot t \quad \text{масова теплоємність}$$

$$\rho(t) := 1853 - 5.453 \cdot 10^{-5} \cdot t^2 - 0.127 \cdot t \quad \text{густина}$$

$$h(tp) := \int_0^{tp} c_p(t) \cdot \rho(t) dt \quad - \text{Объемна ентальпія, Вт/м}^3$$

$$\chi_-(t) := 500 \quad d\chi(t) := 0 \quad \text{електропровідність}$$

$$\chi(t) := 73086.2 - 7.032 \cdot 10^{-9} \cdot t^4 + 5.188 \cdot 10^{-5} \cdot t^3 - 1.381 \cdot 10^{-1} \cdot t^2 + 136.3 \cdot t$$

Густина внутрішнього джерела теплоти в матеріалі фланця

$$qv := 0 \quad \text{Вт/м}^3$$

Розв'язання задачі

1. Функції

Об'єм CE

$$V_{XYZ} := \frac{1}{6} \cdot \left| \begin{pmatrix} 1 & XYZ_{1,1} & XYZ_{1,2} & XYZ_{1,3} \\ 1 & XYZ_{2,1} & XYZ_{2,2} & XYZ_{2,3} \\ 1 & XYZ_{3,1} & XYZ_{3,2} & XYZ_{3,3} \\ 1 & XYZ_{4,1} & XYZ_{4,2} & XYZ_{4,3} \end{pmatrix} \right|$$

Вектори для визначення матриці градієнтів

$$a(XYZ, i) := \begin{cases} \begin{pmatrix} XYZ_{2,1} & XYZ_{2,2} & XYZ_{2,3} \\ XYZ_{3,1} & XYZ_{3,2} & XYZ_{3,3} \\ XYZ_{4,1} & XYZ_{4,2} & XYZ_{4,3} \end{pmatrix} & \text{if } i = 1 \\ \begin{pmatrix} XYZ_{1,1} & XYZ_{1,2} & XYZ_{1,3} \\ XYZ_{3,1} & XYZ_{3,2} & XYZ_{3,3} \\ XYZ_{4,1} & XYZ_{4,2} & XYZ_{4,3} \end{pmatrix} & \text{if } i = 2 \\ \begin{pmatrix} XYZ_{1,1} & XYZ_{1,2} & XYZ_{1,3} \\ XYZ_{2,1} & XYZ_{2,2} & XYZ_{2,3} \\ XYZ_{4,1} & XYZ_{4,2} & XYZ_{4,3} \end{pmatrix} & \text{if } i = 3 \\ \begin{pmatrix} XYZ_{1,1} & XYZ_{1,2} & XYZ_{1,3} \\ XYZ_{3,1} & XYZ_{3,2} & XYZ_{3,3} \\ XYZ_{3,1} & XYZ_{3,2} & XYZ_{3,3} \end{pmatrix} & \text{if } i = 4 \end{cases}$$

$$b(XYZ,i) := \begin{cases} - \begin{vmatrix} 1 & XYZ_{2,2} & XYZ_{2,3} \\ 1 & XYZ_{3,2} & XYZ_{3,3} \\ 1 & XYZ_{4,2} & XYZ_{4,3} \end{vmatrix} & \text{if } i = 1 \\ \begin{vmatrix} 1 & XYZ_{1,2} & XYZ_{1,3} \\ 1 & XYZ_{3,2} & XYZ_{3,3} \\ 1 & XYZ_{4,2} & XYZ_{4,3} \end{vmatrix} & \text{if } i = 2 \\ - \begin{vmatrix} 1 & XYZ_{1,2} & XYZ_{1,3} \\ 1 & XYZ_{2,2} & XYZ_{2,3} \\ 1 & XYZ_{4,2} & XYZ_{4,3} \end{vmatrix} & \text{if } i = 3 \\ \begin{vmatrix} 1 & XYZ_{1,2} & XYZ_{1,3} \\ 1 & XYZ_{2,2} & XYZ_{2,3} \\ 1 & XYZ_{3,2} & XYZ_{3,3} \end{vmatrix} & \text{if } i = 4 \end{cases}$$

$$c(XYZ,i) := \begin{cases} - \begin{vmatrix} XYZ_{2,1} & 1 & XYZ_{2,3} \\ XYZ_{3,1} & 1 & XYZ_{3,3} \\ XYZ_{4,1} & 1 & XYZ_{4,3} \end{vmatrix} & \text{if } i = 1 \\ \begin{vmatrix} XYZ_{1,1} & 1 & XYZ_{1,3} \\ XYZ_{3,1} & 1 & XYZ_{3,3} \\ XYZ_{4,1} & 1 & XYZ_{4,3} \end{vmatrix} & \text{if } i = 2 \\ - \begin{vmatrix} XYZ_{1,1} & 1 & XYZ_{1,3} \\ XYZ_{2,1} & 1 & XYZ_{2,3} \\ XYZ_{4,1} & 1 & XYZ_{4,3} \end{vmatrix} & \text{if } i = 3 \\ \begin{vmatrix} XYZ_{1,1} & 1 & XYZ_{1,3} \\ XYZ_{2,1} & 1 & XYZ_{2,3} \\ XYZ_{3,1} & 1 & XYZ_{3,3} \end{vmatrix} & \text{if } i = 4 \end{cases}$$

$$d(\text{XYZ}, i) := \begin{cases} - \begin{vmatrix} \text{XYZ}_{2,1} & \text{XYZ}_{2,2} & 1 \\ \text{XYZ}_{3,1} & \text{XYZ}_{3,2} & 1 \\ \text{XYZ}_{4,1} & \text{XYZ}_{4,2} & 1 \end{vmatrix} & \text{if } i = 1 \\ \begin{vmatrix} \text{XYZ}_{1,1} & \text{XYZ}_{1,2} & 1 \\ \text{XYZ}_{3,1} & \text{XYZ}_{3,2} & 1 \\ \text{XYZ}_{4,1} & \text{XYZ}_{4,2} & 1 \end{vmatrix} & \text{if } i = 2 \\ - \begin{vmatrix} \text{XYZ}_{1,1} & \text{XYZ}_{1,2} & 1 \\ \text{XYZ}_{2,1} & \text{XYZ}_{2,2} & 1 \\ \text{XYZ}_{4,1} & \text{XYZ}_{4,2} & 1 \end{vmatrix} & \text{if } i = 3 \\ \begin{vmatrix} \text{XYZ}_{1,1} & \text{XYZ}_{1,2} & 1 \\ \text{XYZ}_{2,1} & \text{XYZ}_{2,2} & 1 \\ \text{XYZ}_{3,1} & \text{XYZ}_{3,2} & 1 \end{vmatrix} & \text{if } i = 4 \end{cases}$$

Матриця градієнтів CE

$$B(\text{XYZ}) := \frac{1}{6 \cdot V(\text{XYZ})} \begin{pmatrix} b(\text{XYZ}, 1) & b(\text{XYZ}, 2) & b(\text{XYZ}, 3) & b(\text{XYZ}, 4) \\ c(\text{XYZ}, 1) & c(\text{XYZ}, 2) & c(\text{XYZ}, 3) & c(\text{XYZ}, 4) \\ d(\text{XYZ}, 1) & d(\text{XYZ}, 2) & d(\text{XYZ}, 3) & d(\text{XYZ}, 4) \end{pmatrix}$$

Матриця теплопровідності ізотропного середовища

$$D(\lambda) := \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

Матриця демфірування

$$C(\text{XYZ}, \text{cp}, \rho) := \text{cp} \cdot \rho \cdot \frac{V(\text{XYZ})}{20} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Площа граней СЕ

$$\begin{aligned}
 \underline{\underline{S}}(XYZ, is) := & \begin{array}{l} \text{if } is = 1 \\ \quad \left| \begin{array}{l} i \leftarrow 1 \\ j \leftarrow 2 \\ k \leftarrow 3 \end{array} \right. \\ \text{if } is = 2 \\ \quad \left| \begin{array}{l} i \leftarrow 2 \\ j \leftarrow 3 \\ k \leftarrow 4 \end{array} \right. \\ \text{if } is = 3 \\ \quad \left| \begin{array}{l} i \leftarrow 1 \\ j \leftarrow 3 \\ k \leftarrow 4 \end{array} \right. \\ \text{if } is = 4 \\ \quad \left| \begin{array}{l} i \leftarrow 1 \\ j \leftarrow 2 \\ k \leftarrow 4 \end{array} \right. \\ \\ g1 \leftarrow \left| \begin{pmatrix} XYZ_{i,2} - XYZ_{k,2} & XYZ_{i,3} - XYZ_{k,3} \\ XYZ_{j,2} - XYZ_{k,2} & XYZ_{j,3} - XYZ_{k,3} \end{pmatrix} \right| \\ g2 \leftarrow - \left| \begin{pmatrix} XYZ_{i,1} - XYZ_{k,1} & XYZ_{i,3} - XYZ_{k,3} \\ XYZ_{j,1} - XYZ_{k,1} & XYZ_{j,3} - XYZ_{k,3} \end{pmatrix} \right| \\ g3 \leftarrow \left| \begin{pmatrix} XYZ_{i,1} - XYZ_{k,1} & XYZ_{i,2} - XYZ_{k,2} \\ XYZ_{j,1} - XYZ_{k,1} & XYZ_{j,2} - XYZ_{k,2} \end{pmatrix} \right| \\ \frac{\sqrt{g1^2 + g2^2 + g3^2}}{2} \end{array}
 \end{aligned}$$

123 - сторона 1
 234 - сторона 2
 134 - сторона 3
 124 - сторона 4

Навантаження СЕ за рахунок внутрішніх джерел тепоти

$$f_{qv}(qv, V, XYZ) := \frac{qv \cdot V(XYZ)}{4} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$f_{qvI}(qv, V, XYZ) := \frac{V(XYZ)}{4} \cdot \begin{pmatrix} qv_1 \\ qv_2 \\ qv_3 \\ qv_4 \end{pmatrix}$$

Граничні умови III роду - додаток до матриці жорсткості на стороні ijk - 123 - сторона 1

$$k\alpha_{123}(XYZ, S, \alpha) := \frac{\alpha \cdot S(XYZ, 1)}{12} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Граничні умови III роду - додаток до матриці жорсткості на стороні jkl - 234 - сторона 2

$$k\alpha_{234}(XYZ, S, \alpha) := \frac{\alpha \cdot S(XYZ, 2)}{12} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Граничні умови III роду - додаток до матриці жорсткості на стороні ikl - 134 - сторона 3

$$k\alpha_{134}(XYZ, S, \alpha) := \frac{\alpha \cdot S(XYZ, 3)}{12} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Граничні умови III роду - додаток до матриці жорсткості на стороні ijl - 124 - сторона 4

$$k\alpha_{124}(XYZ, S, \alpha) := \frac{\alpha \cdot S(XYZ, 4)}{12} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Граничні умови III роду - додаток до **вільного члена** на стороні ijk - 123 - сторона 1

$$f\alpha_{123}(XYZ, S, \alpha, Tp) := \frac{\alpha \cdot Tp \cdot S(XYZ, 1)}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Граничні умови III роду - додаток до **вільного члена** на стороні jkl - 234 - сторона 2

$$f\alpha_{234}(XYZ, S, \alpha, Tp) := \frac{\alpha \cdot Tp \cdot S(XYZ, 2)}{3} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Граничні умови III роду - додаток до **вільного члена** на стороні ikl - 134 - сторона 3

$$f\alpha_{134}(XYZ, S, \alpha, Tp) := \frac{\alpha \cdot Tp \cdot S(XYZ, 3)}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Граничні умови III роду - додаток до **вільного члена** на стороні ijl - 124 - сторона 4

$$f\alpha_{124}(XYZ, S, \alpha, Tp) := \frac{\alpha \cdot Tp \cdot S(XYZ, 4)}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Граничні умови II роду для густини електричного струму J_n

Граничні умови II роду - J_n - додаток до **вільного члена** на стороні ijk - 123 - сторона 1

$$f_{Jn_{123}}(XYZ, S, J_n) := \frac{J_n \cdot S(XYZ, 1)}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Граничні умови II роду - Jn - додаток до **вільного члена** на стороні jkl - 234 - сторона 2

$$fJn_{234}(XYZ, S, Jn) := \frac{Jn \cdot S(XYZ, 2)}{3} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Граничні умови II роду - Jn - додаток до **вільного члена** на стороні ikl - 134 - сторона 3

$$fJn_{134}(XYZ, S, Jn) := \frac{Jn \cdot S(XYZ, 3)}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Граничні умови II роду - Jn - додаток до **вільного члена** на стороні ijl - 124 - сторона 4

$$fJn_{124}(XYZ, S, Jn) := \frac{Jn \cdot S(XYZ, 4)}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Обнулення глобальної матриці та вектора вільних членів

i := 1..Nnod_gl

$F_{i,1} := 0$

$F_{i,2} := 0$

Для T і U

j := 1..Nnod_gl

$K_{i,j} := 0$

Крок інтегрування за часом

$\Delta\tau := 120$

Кількість кроків за часом

$N_\tau := 15 \quad 120$

2.1. Функція формування глобальної матриці СПАР

Функція формування глобальної матриці жорсткості $K_{\lambda\chi}$ за умови $\lambda=1$, або $\chi=1$

```
K_λχ := for k ∈ 1..nEl
        for i ∈ 1..M
            j ← El_nod_k,i
            XYZi,1 ← XYZj,1gl
            XYZi,2 ← XYZj,2gl
            XYZi,3 ← XYZj,3gl
            k_λχ ← B(XYZ)T · D(1) · B(XYZ) · V(XYZ)
            for i ∈ 1..M
                igl ← El_nod_k,i
                for j ∈ 1..M
                    jgl ← El_nod_k,j
                    Kigl,jgl ← Kigl,jgl + k_λχi,j
K
```

Функція формування глобальної матриці демфірування K_c за умови $sr=p=1$

```
K_c := for k ∈ 1..nEl
        for i ∈ 1..M
            j ← El_nod_k,i
            XYZi,1 ← XYZj,1gl
            XYZi,2 ← XYZj,2gl
            XYZi,3 ← XYZj,3gl
            C_El ←  $\frac{C(XYZ,1,1)}{\Delta\tau}$ 
            for i ∈ 1..M
                igl ← El_nod_k,i
                for j ∈ 1..M
                    jgl ← El_nod_k,j
                    Kigl,jgl ← Kigl,jgl + C_Eli,j
K
```


Функція формування глобальної матриці зовнішнього конвективного теплообміну K_α за умови заданого α

```

K_α := for k ∈ 1..nEl
    for i ∈ 1..M
        j ← El_nodk,i
        XYZi,1 ← XYZgl,j,1
        XYZi,2 ← XYZgl,j,2
        XYZi,3 ← XYZgl,j,3
    for i ∈ 1..M
        for j ∈ 1..M
            k_Elαi,j ← 0
        for i ∈ 1..M
            if i = 1 ∧ El_BC3k,i = 3
                α ← El_BC3k,6
                k_Elα ← k_Elα + kα123(XYZ, S, α)
            if i = 2 ∧ El_BC3k,i = 3
                α ← El_BC3k,8
                k_Elα ← k_Elα + kα234(XYZ, S, α)
            if i = 3 ∧ El_BC3k,i = 3
                α ← El_BC3k,10
                k_Elα ← k_Elα + kα134(XYZ, S, α)
            if i = 4 ∧ El_BC3k,i = 3
                α ← El_BC3k,12
                k_Elα ← k_Elα + kα124(XYZ, S, α)
        for i ∈ 1..M
            igl ← El_nodk,i
            for j ∈ 1..M
                jgl ← El_nodk,j
                Kigl,jgl ← Kigl,jgl + k_Elαi,j
K

```

2.2 Функція формування глобального вектора СЛАР

```

F_( $\Delta\tau$ , T, T_old, U) :=
    for k  $\in$  1..nEl
        for i  $\in$  1..M
            j  $\leftarrow$  El_nodk,i
            XYZi,1  $\leftarrow$  XYZglj,1
            XYZi,2  $\leftarrow$  XYZglj,2
            XYZi,3  $\leftarrow$  XYZglj,3
        for i  $\in$  1..M
            f $\lambda$ _Eli  $\leftarrow$  0
            f $\chi$ _Eli  $\leftarrow$  0
        for i  $\in$  1..M
            if i = 1  $\wedge$  El_BC3k,i = 3
                 $\alpha$   $\leftarrow$  El_BC3k,6
                Tp  $\leftarrow$  El_BC3k,7
                f $\lambda$ _El  $\leftarrow$  f $\lambda$ _El + f $\alpha$ _123(XYZ, S,  $\alpha$ , Tp)
            if i = 2  $\wedge$  El_BC3k,i = 3
                 $\alpha$   $\leftarrow$  El_BC3k,8
                Tp  $\leftarrow$  El_BC3k,9
                f $\lambda$ _El  $\leftarrow$  f $\lambda$ _El + f $\alpha$ _234(XYZ, S,  $\alpha$ , Tp)
            if i = 3  $\wedge$  El_BC3k,i = 3
                 $\alpha$   $\leftarrow$  El_BC3k,10
                Tp  $\leftarrow$  El_BC3k,11
                f $\lambda$ _El  $\leftarrow$  f $\lambda$ _El + f $\alpha$ _134(XYZ, S,  $\alpha$ , Tp)
            if i = 4  $\wedge$  El_BC3k,i = 3
                 $\alpha$   $\leftarrow$  El_BC3k,12
                Tp  $\leftarrow$  El_BC3k,13
                f $\lambda$ _El  $\leftarrow$  f $\lambda$ _El + f $\alpha$ _124(XYZ, S,  $\alpha$ , Tp)

```

```

    if  $i = 1 \wedge \text{El\_BC2\_Jn}_{k,i} = 2$ 
        |  $\text{Jn} \leftarrow \text{El\_BC2\_Jn}_{k,6}$ 
        |  $f_{\chi\_El} \leftarrow f_{\chi\_El} + f_{\text{Jn\_123}}(\text{XYZ}, S, \text{Jn})$ 
    if  $i = 2 \wedge \text{El\_BC2\_Jn}_{k,i} = 2$ 
        |  $\text{Jn} \leftarrow \text{El\_BC2\_Jn}_{k,7}$ 
        |  $f_{\chi\_El} \leftarrow f_{\chi\_El} + f_{\text{Jn\_234}}(\text{XYZ}, S, \text{Jn})$ 
    if  $i = 3 \wedge \text{El\_BC2\_Jn}_{k,i} = 2$ 
        |  $\text{Jn} \leftarrow \text{El\_BC2\_Jn}_{k,8}$ 
        |  $f_{\chi\_El} \leftarrow f_{\chi\_El} + f_{\text{Jn\_134}}(\text{XYZ}, S, \text{Jn})$ 
    if  $i = 4 \wedge \text{El\_BC2\_Jn}_{k,i} = 2$ 
        |  $\text{Jn} \leftarrow \text{El\_BC2\_Jn}_{k,9}$ 
        |  $f_{\chi\_El} \leftarrow f_{\chi\_El} + f_{\text{Jn\_124}}(\text{XYZ}, S, \text{Jn})$ 
    -----
    for  $i \in 1..M$ 
        |  $j \leftarrow \text{El\_nod}_{k,i}$ 
        |  $U_{El_i} \leftarrow U_j$ 
        |  $T_{El_i} \leftarrow T_j$ 
     $U_{Elm} \leftarrow 0$ 
     $T_{Elm} \leftarrow 0$ 
    for  $i \in 1..M$ 
        |  $U_{Elm} \leftarrow U_{Elm} + U_{El_i}$ 
        |  $T_{Elm} \leftarrow T_{Elm} + T_{El_i}$ 
     $U_{Elm} \leftarrow \frac{U_{Elm}}{M}$ 
     $T_{Elm} \leftarrow \frac{T_{Elm}}{M}$ 
     $\text{Grad\_U} \leftarrow B(\text{XYZ}) \cdot U_{El}$ 
     $qv_{\chi U} \leftarrow \chi(T_{Elm}) \cdot \left[ \left( \text{Grad\_U}_1 \right)^2 + \left( \text{Grad\_U}_2 \right)^2 + \left( \text{Grad\_U}_3 \right)^2 \right]$ 
     $f_{\lambda\_El} \leftarrow f_{\lambda\_El} + f_{qv}(qv_{\chi U}, V, \text{XYZ}) + f_{qv}(qv, V, \text{XYZ})$ 
    for  $i \in 1..M$ 
        |  $igl \leftarrow \text{El\_nod}_{k,i}$ 
        |  $F_{igl,1} \leftarrow F_{igl,1} + f_{\lambda\_El_i}$ 

```

```

    | | |  $F_{igl,2} \leftarrow F_{igl,2} + f_{\chi\_El_i}$ 
    for  $i \in 1..Nnod\_gl$ 
    | |  $\lambda_{gl_i} \leftarrow \lambda(T_i) \cdot T_i$ 
    | |  $\chi_{gl_i} \leftarrow \chi(T_i) \cdot U_i$ 
    | |  $H_{gl_i} \leftarrow h(T_i) - h(T_{old_i})$ 
     $f_{\lambda} \leftarrow K_{\lambda\chi} \cdot \lambda_{gl}$ 
     $f_{\chi} \leftarrow K_{\lambda\chi} \cdot \chi_{gl}$ 
     $f_c \leftarrow K_c \cdot H_{gl}$ 
     $f_{\alpha} \leftarrow K_{\alpha} \cdot T$ 
    for  $i \in 1..Nnod\_gl$ 
    | |  $F_{i,1} \leftarrow F_{i,1} - f_{\alpha_i} - f_{\lambda_i} - f_{c_i}$ 
    | |  $F_{i,2} \leftarrow F_{i,2} - f_{\chi_i}$ 
    for  $j \in 1..n\_slU0$ 
    | |  $n0 \leftarrow Nod\_side1U0_j$ 
    | |  $F_{n0,2} \leftarrow 0$ 
    F

```

Розв'язання лінеаризованої за методом Ньютона СПАР

```

TU_top := for  $i \in 1..Nnod\_gl$ 
    |  $T_i \leftarrow Tp1$ 
    |  $T_{old_i} \leftarrow Tp1$ 
    |  $U_i \leftarrow 0$ 
 $K_{\lambda\chi} \leftarrow K_{\lambda\chi}$ 
 $K_c \leftarrow K_c$ 
 $K_{\alpha} \leftarrow K_{\alpha}$ 
for  $k \in 1..Nr$ 
    | for  $j \in 1..12$ 
    | | for  $i \in 1..Nnod\_gl$ 
    | | |  $\chi_{gl_i} \leftarrow \chi(T_i)$ 
    | | for  $i \in 1..Nnod\_gl$ 
    | | | for  $j \in 1..Nnod\_gl$ 
    | | | |  $K_{i,j} \leftarrow K_{\lambda\chi_{i,j}} \cdot \chi_{gl_j}$ 
    | |  $F1 \leftarrow F_{\Delta\tau, T, T_{old}, U}$ 

```

```

for i ∈ 1..Nnod_gl
  Fi ← F1i,2
for j ∈ 1..n_slU0
  n0 ← Nod_side1U0j
  for i ∈ 1..Nnod_gl
    Kn0,i ← 0
    Ki,n0 ← 0
  Kn0,n0 ← 1
  Fn0 ← 0
δU ← Isolve(K,F)
U ← U + δU
for i ∈ 1..Nnod_gl
  λgli ← λ(Ti) + dλ(Ti)·Ti
  Cpgli ← cp(Ti)·ρ(Ti)
for i ∈ 1..Nnod_gl
  for il ∈ 1..Nnod_gl
    Kλi,il ← K_λi,il·λglil
    Kci,il ← K_ci,il·Cpglil
K ← Kλ + Kc + K_α_
F1 ← F_(Δτ,T,T_old,U)
for i ∈ 1..Nnod_gl
  Fi ← F1i,1
δT ← Isolve(K,F)
T ← T + δT
T_old ← T
for i ∈ 1..Nnod_gl
  TUi,1 ← Ti
  TUi,2 ← Ui
TU

```

```

i := 1..Nnod_gl
Ti := TUtopi,1
Ui := TUtopi,2

```

Обчислення компонент густини теплового потоку (q_x , q_y , q_z) по елементах

```

qEl := for k ∈ 1..nEl
      | St ← 0
      | for i ∈ 1..M
      |   | igl ← El_nodk,i
      |   | T_Eli ← Tigl
      |   | St ← St + T_Eli
      | TEl ←  $\frac{St}{M}$ 
      | for i ∈ 1..M
      |   | j ← El_nodk,i
      |   | XYZi,1 ← XYZgl,j,1
      |   | XYZi,2 ← XYZgl,j,2
      |   | XYZi,3 ← XYZgl,j,3
      | q_El ← -D(λ(TEl))·B(XYZ)·T_El
      | for i ∈ 1..3
      |   | qElk,i ← q_Eli
qEl

```

Обчислення компонент густини теплового потоку (q_x , q_y , q_{sum}) у вузлах CE

```

q_node := for i ∈ 1..Nnod_gl
          | k_cout ← 0
          | qx ← 0
          | qy ← 0
          | qz ← 0
          | for k ∈ 1..nEl
          |   | for j ∈ 1..M
          |     | node ← El_nodk,j
          |     | if node = i
          |       | k_cout ← k_cout + 1
          |       | qx ← qx + qElk,1
          |       | qy ← qy + qElk,2
          |       | qz ← qz + qElk,3

```

```

    if k_cout > 0
        qx ←  $\frac{qx}{k\_cout}$ 
        qy ←  $\frac{qy}{k\_cout}$ 
        qz ←  $\frac{qz}{k\_cout}$ 
        q_nodei,1 ← qx
        q_nodei,2 ← qy
        q_nodei,3 ← qz
        q_nodei,4 ←  $\sqrt{qx^2 + qy^2 + qz^2}$ 
    q_node

```

Формування файлу результатів Result_1

```

Result_1 := for i ∈ 1..Nnod_gl
    Result_1i,1 ← XYZgli,1
    Result_1i,2 ← XYZgli,2
    Result_1i,3 ← XYZgli,3
    Result_1i,4 ← Ti
    Result_1i,5 ← Ui
    Result_1i,6 ← q_nodei,2
    Result_1i,7 ← q_nodei,3
    Result_1i,8 ← q_nodei,4
Result_1

```

Перезапис номерів вузлів CE

```

El_nod3 := for k ∈ 1..nEl
    for j ∈ 1..M
        El_nod3k,j ← El_nodk,j
El_nod3

```

Tmin,Tmax

```

Tmin_max :=
  Tmin ← 106
  for i ∈ 1..Nnod_gl
    Tmin ← Ti if Tmin > Ti
  Tmax ← -106
  for i ∈ 1..Nnod_gl
    Tmax ← Ti if Tmax < Ti
  Tmin_max1 ← Tmin
  Tmin_max2 ← Tmax
  Tmin_max

```

$$\text{Tmin_max} = \begin{pmatrix} 115.389488 \\ 115.885535 \end{pmatrix}$$

```

Umin_max :=
  Umin ← 106
  for i ∈ 1..Nnod_gl
    Umin ← Ui if Umin > Ui
  Umax ← -106
  for i ∈ 1..Nnod_gl
    Umax ← Ui if Umax < Ui
  Umin_max1 ← Umin
  Umin_max2 ← Umax
  Umin_max

```

$$\text{Umin_max} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.1148 \end{pmatrix}$$

А.3. Задача пружно-пластичної поведінки ізотропного матеріалу

Програмний код **Pl_RMA_MIZES_Biso.xmcd** розроблено за математичною постановкою та числовою методикою розв'язання задачі, що наведена в розділі 3 (див. підрозділи 3.1–3.3), та супроводжується необхідними коментарями.

Файл **Pl_RMA_MIZES_Biso.xmcd** Return-mapping Algorithms

пружнопластичність 3D задача

В коді видаляються зайві вузли, що пише програма Gmsh у файл *.msh при побудові 3D геометрії інструментами Gmsh, наприклад, Extrude

ORIGIN ≡ 1 Індексація масивів з 1

Фізичні властивості

$E := 2 \cdot 10^{11}$ Па модуль пружності

$\nu := 0.3$ коефіцієнт Пуассона

$\beta := 1.3 \cdot 10^{-6}$ K^{-1} КЛТР

$\rho := 7850$ kg/m^3 густина

$\sigma_{T0} := 320 \cdot 10^6$ Па межа текучості матеріалу

$H_- := 1.5 \cdot 10^9$ Па танген модуль

Навантаження

$p := 150 \cdot 10^6$ Па тиск

$\Delta T := 0$ К температурне навантаження

$g_x := 0$ $g_y := 0$ $g_z := 0$ складові прискорення вільного падіння

$M := 4$ кількість вузлів в тетраедному скінченному елементі

Зчитування номерів і координат вузлів дискретизованої в програмі Gmsh моделі фланця з файлу Cyl_pl.msh (без створення додаткових файлів)

Спочатку текстовий файл Cyl_pl.msh треба дуже просто відрегувати, а саме записати в перший його рядок таку послідовність цифр: 11 22 33 44 55 66 77 88 99 100

Це необхідно для того, щоб провести ініціалізацію матриці в яку буде зчитуватися файл Cyl_pl.msh

Зчитування текстового файлу Cyl_pl.msh в матрицю A

$A :=$



D:... \Cyl_pl.msh

Визначення кількості глобальних вузлів дискретизованої моделі

$Nnod_gl := A_{6,1} = 745$ кількість глобальних вузлів

Запис координат глобальних вузлів в матрицю $Gmsh_nodes$ з матриці A

```
Gmsh_nodes := | for i ∈ 1..Nnod_gl
                |   Gmsh_nodesi,1 ← i
                |   Gmsh_nodesi,2 ← A6+i,2
                |   Gmsh_nodesi,3 ← A6+i,3
                |   Gmsh_nodesi,4 ← A6+i,4
                | Gmsh_nodes
```

Визначення кількості рядків в матриці A

$NA := rows(A) = 4438$

Запис номерів глобальних вузлів по елементах в матрицю El_nod з матриці A

```
El_nod := | k ← 0
           | for i ∈ 1..NA
           |   if Ai,2 = 4
           |     k ← k + 1
           |     Gmsh_elemk,1 ← Ai,6
           |     Gmsh_elemk,2 ← Ai,7
           |     Gmsh_elemk,3 ← Ai,8
           |     Gmsh_elemk,4 ← Ai,9
           | Gmsh_elem
```

кількість скінчених елементів

Матриця номерів вузлів скінчених елементів

Визначення кількості рядків в матриці El_nod - кількості скінчених елементів в дискретизованій моделі

$nEl := rows(El_nod) = 2041$ кількість скінчених елементів

Функція яка визначає номери вузлів (точок) які не є вузлами розрахункової сітки (тобто не використовуються в СЕ), а виникають при побудові 3D геометрії в програмі Gmsh за допомогою команди Extrude.

```

Nod_Del := | L ← 0
           | for i ∈ 1..Nnod_gl
           |   pL ← 0
           |   for j ∈ 1..nEl
           |     for k ∈ 1..4
           |       pL ← 1 if El_nodj,k = i
           |   if pL = 0
           |     L ← L + 1
           |     Nod_DelL ← i
           | Nod_Del

```

$$\text{Nod_Del} = \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$N_Del := \text{rows}(\text{Nod_Del}) = 2$ Кількість зайвих вузлів, що не використовуються в СЕ

Сортування

```

Nod_Del := | sort(Nod_Del) if N_Del > 0
           | 0 otherwise

```

$$\text{Nod_Del} = \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \end{pmatrix}$$

Видалення вузлів або стискання номерів вузлів, що не використовуються в розрахунковій сітці

```

Gmsh_nodes := | for i ∈ 1..N_Del
               |   if N_Del > 0
               |     n ← Nod_Deli
               |     if n < Nnod_gl
               |       for j ∈ n + 1..Nnod_gl
               |         for k ∈ 1..M
               |           Gmsh_nodesj-1,k ← Gmsh_nodesj,k
               |       for k ∈ i + 1..N_Del      if i < N_Del
               |         Nod_Delk ← Nod_Delk - 1
               | Gmsh_nodes

```

Nnod_gl := Nnod_gl - N_Del = 743

Запис глобальних вузлів дискретизованої моделі фланця у матрицю XYZgl

```
XYZgl := | for i ∈ 1..Nnod_gl
          |   XYZgli,1 ← Gmsh_nodesi,2
          |   XYZgli,2 ← Gmsh_nodesi,3
          |   XYZgli,3 ← Gmsh_nodesi,4
          | XYZgl
```

Матриця глобальних вузлів

Nnod_gl = 743

Перекодування номерів вузлів по тетраедричних елементах

```
El_nod := | for j ∈ 1..nEl
          |   for k ∈ 1..4
          |     ik ← El_nodj,k
          |     for i ∈ 1..Nnod_gl
          |       if ik = Gmsh_nodesi,1
          |         | il ← i
          |         | break
          |       El_nodj,k ← il
          | El_nod
```

nEl = 2041

Запис номерів глобальних вузлів по поверхневих елементах в матрицю Area2_nod_El з матриці A

```
Area2_nod_El := | k ← 0
                 | for i ∈ 1..NA
                 |   if Ai,2 = 2
                 |     | k ← k + 1
                 |     | Area_elemk,1 ← Ai,1
                 |     | Area_elemk,2 ← Ai,2
                 |     | Area_elemk,3 ← Ai,3
                 |     | Area_elemk,4 ← Ai,4
                 |     | Area_elemk,5 ← Ai,5
                 |     | Area_elemk,6 ← Ai,6
                 |     | Area_elemk,7 ← Ai,7
                 |     | Area_elemk,8 ← Ai,8
                 |   Area_elem
```

N_Area2 := rows(Area2_nod_El) = 1482

Кількість рядків в матриці

-- Перекодування номерів вузлів по трикутних елементах на поверхнях --

```
Area2_nod_El :=
  for j ∈ 1..N_Area2
    for k ∈ 6..8
      ik ← Area2_nod_Elj,k
      for i ∈ 1..Nnod_gl
        if ik = Gmsh_nodesi,1
          il ← i
          break
      Area2_nod_Elj,k ← il
  Area2_nod_El
```

На торці фланця ГУ заземлення по координаті
у ($U_z=0$) - поверхня №1 - визначено в програмі
Gmsh

На осях симетрії №20 - $U_y=0$ і №28 - $U_x=0$

На внутрішній стороні фланця №32 - задається тиск

Тобто з матриці Area2_nod_El треба отримати інформацію про трикутні СЕ на поверхнях
1, 20, 28, 32. Ця інформація включає номери глобальних вузлів.

1.1. Визначення номерів глобальних вузлів трикутних елементів поверхні № 1 з матриці Area2_nod_El

функція

```
El_nod_(k) :=
  row ← 0
  for i ∈ 1..N_Area2
    j ← Area2_nod_Eli,5
    if j = k
      row ← row + 1
      for l ∈ 1..3
        El_nodrow,l ← Area2_nod_Eli,5+l
  El_nod
```

El_nod1 := El_nod_(1) тут 1 це номер поверхні

N_El_side1 := rows(El_nod1) = 603 кількість трикутних елементів на поверхні 1

1.2. Запис номерів вузлів елементів на стороні № 1 у вектор (без повторення однакових номерів)

функція

```

Nod_side(N_El_side, El_nod) :=
  k ← 0
  for i ∈ 1..N_El_side
    if i = 1
      for j ∈ 1..3
        Nod_side_{k+j} ← El_nod_{i,j}
        k ← k + 3
    if i > 1
      for j ∈ 1..3
        n ← El_nod_{i,j}
        j0 ← -1
        for l ∈ 1..k
          j0 ← 0 if Nod_side_l = n
        if j0 = -1
          k ← k + 1
          Nod_side_k ← n
      p ← 0
  Nod_side_

```

```

Nod_side1 := Nod_side(N_El_side1, El_nod1)    Uz=0
n_s1 := rows(Nod_side1) = 338

```

8.1 Визначення номерів глобальних вузлів трикутних елементів поверхні № 20 з матриці Area2_nod_El

El_nod20 := El_nod_(20) тут 20 це номер поверхні

N_El_side20 := rows(El_nod20) = 30 кількість трикутних елементів на поверхні 20

8.2. Запис номерів вузлів елементів на стороні № 20 у вектор (без повторення однакових номерів)

```

Nod_side20 := Nod_side(N_El_side20, El_nod20)    Uy=0
n_s20 := rows(Nod_side20) = 26

```

9.1 Визначення номерів глобальних вузлів трикутних елементів поверхні № 28 з матриці Area2_nod_El

El_nod28 := El_nod_(28) тут 28 це номер поверхні

N_El_side28 := rows(El_nod28) = 30 кількість трикутних елементів на поверхні 28

9.2. Запис номерів вузлів елементів на стороні № 28 у вектор (без повторення однакових номерів)

$Nod_side28 := Nod_side(N_El_side28, El_nod28) \quad Ux=0$
 $n_s28 := rows(Nod_side28) = 26$

10.1 Визначення номерів глобальних вузлів трикутних елементів поверхні № 32 з матриці Area2_nod_El

$El_nod32 := El_nod_ (32)$ ----- тут 32 це номер поверхні

$N_El_side32 := rows(El_nod32) = 82$ кількість трикутних елементів на поверхні 32

10.2. Запис номерів вузлів елементів на стороні № 32 у вектор (без повторення однакових номерів)

$Nod_side32 := Nod_side(N_El_side32, El_nod32)$
 $n_s32 := rows(Nod_side32) = 65$

Тепер ці дані треба зв'язати зі сторонами тетраедричних CE

функція, яка встановлює зв'язок поверхневих трикутників з номерами тетраедричних CE та номерами їх сторін

```
BC2_Side(El_nod_, N_El_side) :=
  n ← 0
  for i ∈ 1..N_El_side
    e1 ← El_nod_{i,1}
    e2 ← El_nod_{i,2}
    e3 ← El_nod_{i,3}
    for j ∈ 1..nEl
      e1 ← El_nod_{j,1}
      e2 ← El_nod_{j,2}
      e3 ← El_nod_{j,3}
      e4 ← El_nod_{j,4}
      if (e1 = e1 ∨ e1 = e2 ∨ e1 = e3) ∧ (e2 = e1 ∨ e2 = e2 ∨ e2 = e3) ∧ (e3 = e1 ∨ e3 = e2 ∨ e3 = e3)
        n ← n + 1
        BC2_{n,1} ← j
        BC2_{n,2} ← 1
        break
      if (e2 = e1 ∨ e2 = e2 ∨ e2 = e3) ∧ (e3 = e1 ∨ e3 = e2 ∨ e3 = e3) ∧ (e4 = e1 ∨ e4 = e2 ∨ e4 = e3)
        n ← n + 1
        BC2_{n,1} ← j
        BC2_{n,2} ← 2
        break
      if (e1 = e1 ∨ e1 = e2 ∨ e1 = e3) ∧ (e3 = e1 ∨ e3 = e2 ∨ e3 = e3) ∧ (e4 = e1 ∨ e4 = e2 ∨ e4 = e3)
        n ← n + 1
        BC2_{n,1} ← j
        BC2_{n,2} ← 3
        break
      if (e1 = e1 ∨ e1 = e2 ∨ e1 = e3) ∧ (e2 = e1 ∨ e2 = e2 ∨ e2 = e3) ∧ (e4 = e1 ∨ e4 = e2 ∨ e4 = e3)
        n ← n + 1
        BC2_{n,1} ← j
        BC2_{n,2} ← 4
        break
```

123 - сторона 1

243 - сторона 2

134 - сторона 3

142 - сторона 4

```

      | | | | n ← n + 1
      | | | | BC2n,1 ← j
      | | | | BC2n,2 ← 4
      | | | | break
      | | | z ← 0
      | | f ← 0
      | BC2

```

Задання граничних умов тиску на сторонах фланця

Сторони фланця з номерами 32, на яких задані граничні умови - тиск

Сторона № 32 - внутрішня сторона фланця

BC2_Side32 := BC2_Side(EI_nod32, N_EI_side32)

Формування глобальної матриці EI_BC2 для ГУ II роду по елементах

В матриці EI_BC2 перші 4 стовпці це сторони тетраедра ijk (1), jkl (2), ikl (3), ijl (4), в яких задано ГУ 2-го роду (може бути 0 або 2), 5-й - номер CE

```

EI_BC2 := for el ∈ 1..nEI
  EI_BC2el,5 ← el
  for j ∈ 1..N_EI_side32
    if BC2_Side32j,1 = el
      EI_BC2el,1 ← 2 if BC2_Side32j,2 = 1
      EI_BC2el,2 ← 2 if BC2_Side32j,2 = 2
      EI_BC2el,3 ← 2 if BC2_Side32j,2 = 3
      EI_BC2el,4 ← 2 if BC2_Side32j,2 = 4
  pp ← 0
EI_BC2

```

+

Розв'язання задачі

1. Функції

Об'єм CE

$$V_{xyz} := \frac{1}{6} \cdot \left| \begin{pmatrix} 1 & XYZ_{1,1} & XYZ_{1,2} & XYZ_{1,3} \\ 1 & XYZ_{2,1} & XYZ_{2,2} & XYZ_{2,3} \\ 1 & XYZ_{3,1} & XYZ_{3,2} & XYZ_{3,3} \\ 1 & XYZ_{4,1} & XYZ_{4,2} & XYZ_{4,3} \end{pmatrix} \right|$$

Вектори для визначення матриці градієнтів

$$a(XYZ, i) := \begin{cases} \begin{pmatrix} XYZ_{2,1} & XYZ_{2,2} & XYZ_{2,3} \\ XYZ_{3,1} & XYZ_{3,2} & XYZ_{3,3} \\ XYZ_{4,1} & XYZ_{4,2} & XYZ_{4,3} \end{pmatrix} & \text{if } i = 1 \\ \begin{pmatrix} XYZ_{1,1} & XYZ_{1,2} & XYZ_{1,3} \\ XYZ_{3,1} & XYZ_{3,2} & XYZ_{3,3} \\ XYZ_{4,1} & XYZ_{4,2} & XYZ_{4,3} \end{pmatrix} & \text{if } i = 2 \end{cases}$$

$$\begin{array}{c}
 \left| \begin{pmatrix} \text{XYZ}_{1,1} & \text{XYZ}_{1,2} & \text{XYZ}_{1,3} \\ \text{XYZ}_{2,1} & \text{XYZ}_{2,2} & \text{XYZ}_{2,3} \\ \text{XYZ}_{4,1} & \text{XYZ}_{4,2} & \text{XYZ}_{4,3} \end{pmatrix} \right| \quad \text{if } i = 3 \\
 \hline
 \left| \begin{pmatrix} \text{XYZ}_{1,1} & \text{XYZ}_{1,2} & \text{XYZ}_{1,3} \\ \text{XYZ}_{3,1} & \text{XYZ}_{3,2} & \text{XYZ}_{3,3} \\ \text{XYZ}_{3,1} & \text{XYZ}_{3,2} & \text{XYZ}_{3,3} \end{pmatrix} \right| \quad \text{if } i = 4
 \end{array}$$

$$\begin{array}{c}
 \text{b}(\text{XYZ}, i) := \left| \begin{pmatrix} 1 & \text{XYZ}_{2,2} & \text{XYZ}_{2,3} \\ 1 & \text{XYZ}_{3,2} & \text{XYZ}_{3,3} \\ 1 & \text{XYZ}_{4,2} & \text{XYZ}_{4,3} \end{pmatrix} \right| \quad \text{if } i = 1 \\
 \left| \begin{pmatrix} 1 & \text{XYZ}_{1,2} & \text{XYZ}_{1,3} \\ 1 & \text{XYZ}_{3,2} & \text{XYZ}_{3,3} \\ 1 & \text{XYZ}_{4,2} & \text{XYZ}_{4,3} \end{pmatrix} \right| \quad \text{if } i = 2 \\
 - \left| \begin{pmatrix} 1 & \text{XYZ}_{1,2} & \text{XYZ}_{1,3} \\ 1 & \text{XYZ}_{2,2} & \text{XYZ}_{2,3} \\ 1 & \text{XYZ}_{4,2} & \text{XYZ}_{4,3} \end{pmatrix} \right| \quad \text{if } i = 3 \\
 \left| \begin{pmatrix} 1 & \text{XYZ}_{1,2} & \text{XYZ}_{1,3} \\ 1 & \text{XYZ}_{2,2} & \text{XYZ}_{2,3} \\ 1 & \text{XYZ}_{3,2} & \text{XYZ}_{3,3} \end{pmatrix} \right| \quad \text{if } i = 4
 \end{array}$$

$$\begin{array}{c}
 \text{c}(\text{XYZ}, i) := - \left| \begin{pmatrix} \text{XYZ}_{2,1} & 1 & \text{XYZ}_{2,3} \\ \text{XYZ}_{3,1} & 1 & \text{XYZ}_{3,3} \\ \text{XYZ}_{4,1} & 1 & \text{XYZ}_{4,3} \end{pmatrix} \right| \quad \text{if } i = 1 \\
 \left| \begin{pmatrix} \text{XYZ}_{1,1} & 1 & \text{XYZ}_{1,3} \\ \text{XYZ}_{3,1} & 1 & \text{XYZ}_{3,3} \\ \text{XYZ}_{4,1} & 1 & \text{XYZ}_{4,3} \end{pmatrix} \right| \quad \text{if } i = 2 \\
 - \left| \begin{pmatrix} \text{XYZ}_{1,1} & 1 & \text{XYZ}_{1,3} \\ \text{XYZ}_{2,1} & 1 & \text{XYZ}_{2,3} \\ \text{XYZ}_{4,1} & 1 & \text{XYZ}_{4,3} \end{pmatrix} \right| \quad \text{if } i = 3 \\
 \left| \begin{pmatrix} \text{XYZ}_{1,1} & 1 & \text{XYZ}_{1,3} \\ \text{XYZ}_{2,1} & 1 & \text{XYZ}_{2,3} \\ \text{XYZ}_{3,1} & 1 & \text{XYZ}_{3,3} \end{pmatrix} \right| \quad \text{if } i = 4
 \end{array}$$

$$d(XYZ,i) := \begin{cases} - \begin{vmatrix} XYZ_{2,1} & XYZ_{2,2} & 1 \\ XYZ_{3,1} & XYZ_{3,2} & 1 \\ XYZ_{4,1} & XYZ_{4,2} & 1 \end{vmatrix} & \text{if } i = 1 \\ - \begin{vmatrix} XYZ_{1,1} & XYZ_{1,2} & 1 \\ XYZ_{3,1} & XYZ_{3,2} & 1 \\ XYZ_{4,1} & XYZ_{4,2} & 1 \end{vmatrix} & \text{if } i = 2 \\ - \begin{vmatrix} XYZ_{1,1} & XYZ_{1,2} & 1 \\ XYZ_{2,1} & XYZ_{2,2} & 1 \\ XYZ_{4,1} & XYZ_{4,2} & 1 \end{vmatrix} & \text{if } i = 3 \\ - \begin{vmatrix} XYZ_{1,1} & XYZ_{1,2} & 1 \\ XYZ_{2,1} & XYZ_{2,2} & 1 \\ XYZ_{3,1} & XYZ_{3,2} & 1 \end{vmatrix} & \text{if } i = 4 \end{cases}$$

Матриця градієнтів CE

$$B(XYZ) := \frac{1}{6 \cdot V(XYZ)} \cdot \begin{pmatrix} b(XYZ,1) & 0 & 0 & b(XYZ,2) & 0 & 0 & b(XYZ,3) & 0 & 0 & b(XYZ,4) & 0 & 0 \\ 0 & c(XYZ,1) & 0 & 0 & c(XYZ,2) & 0 & 0 & c(XYZ,3) & 0 & 0 & c(XYZ,4) & 0 \\ 0 & 0 & d(XYZ,1) & 0 & 0 & d(XYZ,2) & 0 & 0 & d(XYZ,3) & 0 & 0 & d(XYZ,4) \\ c(XYZ,1) & b(XYZ,1) & 0 & c(XYZ,2) & b(XYZ,2) & 0 & c(XYZ,3) & b(XYZ,3) & 0 & c(XYZ,4) & b(XYZ,4) & 0 \\ 0 & d(XYZ,1) & c(XYZ,1) & 0 & d(XYZ,2) & c(XYZ,2) & 0 & d(XYZ,3) & c(XYZ,3) & 0 & d(XYZ,4) & c(XYZ,4) \\ d(XYZ,1) & 0 & b(XYZ,1) & d(XYZ,2) & 0 & b(XYZ,2) & d(XYZ,3) & 0 & b(XYZ,3) & d(XYZ,4) & 0 & b(XYZ,4) \end{pmatrix}$$

Матриця пружних констант

$$D(E, \nu) := \frac{E \cdot (1 - \nu)}{(1 + \nu) \cdot (1 - 2 \cdot \nu)} \cdot \begin{bmatrix} 1 & \frac{\nu}{1 - \nu} & \frac{\nu}{1 - \nu} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu}{1 - \nu} & 1 & \frac{\nu}{1 - \nu} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu}{1 - \nu} & \frac{\nu}{1 - \nu} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1 - 2 \cdot \nu}{2 \cdot (1 - \nu)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1 - 2 \cdot \nu}{2 \cdot (1 - \nu)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1 - 2 \cdot \nu}{2 \cdot (1 - \nu)} \end{bmatrix}$$

Площа граней CE

$$\begin{aligned}
 S(XYZ, is) := & \begin{cases} \text{if } is = 1 \\ \quad \begin{cases} i \leftarrow 1 \\ j \leftarrow 2 \\ k \leftarrow 3 \end{cases} \\ \text{if } is = 2 \\ \quad \begin{cases} i \leftarrow 2 \\ j \leftarrow 4 \\ k \leftarrow 3 \end{cases} \\ \text{if } is = 3 \\ \quad \begin{cases} i \leftarrow 1 \\ j \leftarrow 3 \\ k \leftarrow 4 \end{cases} \\ \text{if } is = 4 \\ \quad \begin{cases} i \leftarrow 1 \\ j \leftarrow 4 \\ k \leftarrow 2 \end{cases} \\ g1 \leftarrow \left| \begin{pmatrix} XYZ_{i,2} - XYZ_{k,2} & XYZ_{i,3} - XYZ_{k,3} \\ XYZ_{j,2} - XYZ_{k,2} & XYZ_{j,3} - XYZ_{k,3} \end{pmatrix} \right| \\ g2 \leftarrow - \left| \begin{pmatrix} XYZ_{i,1} - XYZ_{k,1} & XYZ_{i,3} - XYZ_{k,3} \\ XYZ_{j,1} - XYZ_{k,1} & XYZ_{j,3} - XYZ_{k,3} \end{pmatrix} \right| \\ g3 \leftarrow \left| \begin{pmatrix} XYZ_{i,1} - XYZ_{k,1} & XYZ_{i,2} - XYZ_{k,2} \\ XYZ_{j,1} - XYZ_{k,1} & XYZ_{j,2} - XYZ_{k,2} \end{pmatrix} \right| \\ \frac{\sqrt{g1^2 + g2^2 + g3^2}}{2} \end{cases} \\
 \end{aligned}
 \begin{array}{l}
 123 - \text{сторона 1} \\
 243 - \text{сторона 2} \\
 134 - \text{сторона 3} \\
 142 - \text{сторона 4}
 \end{array}
 \end{aligned}$$

Направляючі косинуси до граней CE
 Для правильності знаків компонент нормалі,
 тут обов'язковий обхід вузлів граней тетраедра
 проти годинникової стрілки, якщо дивитися із
 середини тетраедного CE

$$\begin{aligned}
 n(XYZ, is) := & \begin{cases} \text{if } is = 1 \\ \quad \begin{cases} i \leftarrow 1 \\ j \leftarrow 2 \\ k \leftarrow 3 \end{cases} \\ \text{if } is = 2 \\ \quad \begin{cases} i \leftarrow 2 \\ j \leftarrow 4 \\ k \leftarrow 3 \end{cases} \end{cases}
 \end{aligned}$$

```

if is = 3
    i ← 1
    j ← 3
    k ← 4
if is = 4
    i ← 1
    j ← 4
    k ← 2
g1 ←  $\begin{pmatrix} XYZ_{i,2} - XYZ_{k,2} & XYZ_{i,3} - XYZ_{k,3} \\ XYZ_{j,2} - XYZ_{k,2} & XYZ_{j,3} - XYZ_{k,3} \end{pmatrix}$ 
g2 ←  $-\begin{pmatrix} XYZ_{i,1} - XYZ_{k,1} & XYZ_{i,3} - XYZ_{k,3} \\ XYZ_{j,1} - XYZ_{k,1} & XYZ_{j,3} - XYZ_{k,3} \end{pmatrix}$ 
g3 ←  $\begin{pmatrix} XYZ_{i,1} - XYZ_{k,1} & XYZ_{i,2} - XYZ_{k,2} \\ XYZ_{j,1} - XYZ_{k,1} & XYZ_{j,2} - XYZ_{k,2} \end{pmatrix}$ 
S ←  $\sqrt{g1^2 + g2^2 + g3^2}$ 


---


 $\begin{pmatrix} \frac{g1}{S} \\ \frac{g2}{S} \\ \frac{g3}{S} \end{pmatrix}$ 

```

Вектор навантаження СЕ від теплового розширення

$$f_{th}(XYZ, E, \nu, \beta) := \frac{\beta \cdot E \cdot \Delta T \cdot V(XYZ)}{1 - 2 \cdot \nu} \cdot B(XYZ)^T \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Об'ємне навантаження на СЕ (від початкового напруження)

$$f_{\Delta\sigma 0}(XYZ, \Delta\sigma P) := V(XYZ) \cdot B(XYZ)^T \cdot \Delta\sigma P$$

Об'ємне навантження на СЕ (сила гравітації)

$$f_v(XYZ, g_x, g_y, g_z) := \frac{V(XYZ)}{4} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \rho \cdot g_x \\ \rho \cdot g_y \\ \rho \cdot g_z \end{pmatrix}$$

Зусилля (тиск) на грані 1 СЕ - вузли 1,2,3

$$f_{p1_123}(XYZ, p) := \frac{S(XYZ, 1)}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p \cdot n(XYZ, 1)_1 \\ p \cdot n(XYZ, 1)_2 \\ p \cdot n(XYZ, 1)_3 \end{pmatrix}$$

Зусилля (тиск) на грані 2 СЕ - вузли 2,3,4

$$f_{p2_234}(XYZ, p) := \frac{S(XYZ, 2)}{3} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p \cdot n(XYZ, 2)_1 \\ p \cdot n(XYZ, 2)_2 \\ p \cdot n(XYZ, 2)_3 \end{pmatrix}$$

Зусилля (тиск) на грані 3 CE - вузли 1,3,4

$$f_{p3_134}(XYZ, p) := \frac{S(XYZ, 3)}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p \cdot n(XYZ, 3)_1 \\ p \cdot n(XYZ, 3)_2 \\ p \cdot n(XYZ, 3)_3 \end{pmatrix}$$

Зусилля (тиск) на грані 4 CE - вузли 1,2,4

$$f_{p4_124}(XYZ, p) := \frac{S(XYZ, 4)}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p \cdot n(XYZ, 4)_1 \\ p \cdot n(XYZ, 4)_2 \\ p \cdot n(XYZ, 4)_3 \end{pmatrix}$$

Обнулення глобальної матриці та вектора вільних членів

$i := 1..3Nnod_gl$

$F_i := 0$

$j := 1..3Nnod_gl$

$K_{i,j} := 0$

2. Формування глобальної матриці і вектора СПАР та її розв'язання

```

U_(λ, ΔσP) := for k ∈ 1..nEl
                for i ∈ 1..M
                    j ← El_nodk,i
                    XYZi,1 ← XYZglj,1
                    XYZi,2 ← XYZglj,2
                    XYZi,3 ← XYZglj,3
                for i ∈ 1..3M
                    f_Eli ← 0
                k_El ← B(XYZ)T · D(E, ν) · B(XYZ) · V(XYZ)
                for i ∈ 1..M
                    f_El ← f_El + f_p1_123(XYZ, p) · λ if i = 1 ∧ El_BC2k,i = 2
                    f_El ← f_El + f_p2_234(XYZ, p) · λ if i = 2 ∧ El_BC2k,i = 2
                    f_El ← f_El + f_p3_134(XYZ, p) · λ if i = 3 ∧ El_BC2k,i = 2
                    f_El ← f_El + f_p4_124(XYZ, p) · λ if i = 4 ∧ El_BC2k,i = 2
                f_El ← f_El + f_v(XYZ, gx, gy, gz) + f_th(XYZ, E, ν, β)
                for i ∈ 1..6
                    Δ_σPi ← ΔσPk,i
                f_El ← f_El + f_Δσ0(XYZ, Δ_σP)
                for i ∈ 1..M
                    ig ← El_nodk,i
                    ig1 ← ig-3
                    ii ← i-3
                    Fig1-2 ← Fig1-2 + f_Elii-2
                    Fig1-1 ← Fig1-1 + f_Elii-1
                    Fig1 ← Fig1 + f_Elii

```

```

for j ∈ 1..M
    jgl ← El_nodk,j·3
    jj ← j·3
    Kig1-2,jgl-2 ← Kig1-2,jgl-2 + kElii-2,jj-2
    Kig1-2,jgl-1 ← Kig1-2,jgl-1 + kElii-2,jj-1
    Kig1-2,jgl ← Kig1-2,jgl + kElii-2,jj
    Kig1-1,jgl-2 ← Kig1-1,jgl-2 + kElii-1,jj-2
    Kig1-1,jgl-1 ← Kig1-1,jgl-1 + kElii-1,jj-1
    Kig1-1,jgl ← Kig1-1,jgl + kElii-1,jj
    Kig1,jgl-2 ← Kig1,jgl-2 + kElii,jj-2
    Kig1,jgl-1 ← Kig1,jgl-1 + kElii,jj-1
    Kig1,jgl ← Kig1,jgl + kElii,jj
for j ∈ 1..n_s20
    ny ← Nod_side20j
    for i ∈ 1..3·Nnod_g1
        K3·ny-1,i ← 0
        Ki,3·ny-1 ← 0
    K3·ny-1,3·ny-1 ← 1
    F3·ny-1 ← 0
for j ∈ 1..n_s28
    nx ← Nod_side28j
    for i ∈ 1..3·Nnod_g1
        K3·nx-2,i ← 0
        Ki,3·nx-2 ← 0
    K3·nx-2,3·nx-2 ← 1
    F3·nx-2 ← 0

```



```

    for j ∈ 1..n_s1
        nz ← Nod_side1_j
        for i ∈ 1..3·Nnod_gl
            K3·nz,i ← 0
            Ki,3·nz ← 0
        K3·nz,3·nz ← 1
        F3·nz ← 0
    U ← lsolve(K,F)
    U

```

Функції

Визначення векторів переміщень U_x , U_y , U_z у вузлах

$$U_x(U) := \left| \begin{array}{l} \text{for } i \in 1..Nnod_gl \\ U_{x_i} \leftarrow U_{3 \cdot i - 2} \\ U_x \end{array} \right| \quad U_y(U) := \left| \begin{array}{l} \text{for } i \in 1..Nnod_gl \\ U_{y_i} \leftarrow U_{3 \cdot i - 1} \\ U_y \end{array} \right| \quad U_z(U) := \left| \begin{array}{l} \text{for } i \in 1..Nnod_gl \\ U_{z_i} \leftarrow U_{3 \cdot i} \\ U_z \end{array} \right|$$

Обчислення компонент пружної деформації
(ϵ_{xx} , ϵ_{yy} , ϵ_{zz} , ϵ_{xy} , ϵ_{yz} , ϵ_{xz}) по елементах

$$\epsilon_-(U) := \left| \begin{array}{l} \text{for } k \in 1..nEl \\ \text{for } i \in 1..M \\ \quad igl \leftarrow El_nod_{k,i} \cdot 3 \\ \quad ii \leftarrow i \cdot 3 \\ \quad U_El_{ii-2} \leftarrow U_{igl-2} \\ \quad U_El_{ii-1} \leftarrow U_{igl-1} \\ \quad U_El_{ii} \leftarrow U_{igl} \\ \text{for } i \in 1..M \\ \quad j \leftarrow El_nod_{k,i} \\ \quad XYZ_{i,1} \leftarrow XYZgl_{j,1} \\ \quad XYZ_{i,2} \leftarrow XYZgl_{j,2} \\ \quad XYZ_{i,3} \leftarrow XYZgl_{j,3} \\ \epsilon_El \leftarrow B(XYZ) \cdot U_El \\ \text{for } i \in 1..6 \\ \quad \epsilon_{k,i} \leftarrow \epsilon_El_i \end{array} \right|$$

$$\epsilon$$

Обчислення компонент пружних напружень (σ_{xx} , σ_{yy} , σ_{zz} , σ_{xy} , σ_{yz} , σ_{xz}) по елементах

$$\sigma_{_}(\varepsilon) := \left| \begin{array}{l} \text{for } k \in 1..nEl \\ \quad \left| \begin{array}{l} \text{for } i \in 1..6 \\ \quad \varepsilon e_i \leftarrow \varepsilon_{k,i} \\ \quad \sigma e \leftarrow D(E, \nu) \cdot \varepsilon e \\ \quad \text{for } i \in 1..6 \\ \quad \quad \sigma_{k,i} \leftarrow \sigma e_i \end{array} \right. \\ \sigma \end{array} \right.$$

Обчислення max значення еквівалентного напруження по елементах

$$\sigma_max_(\sigma E_M) := \left| \begin{array}{l} \sigma_max \leftarrow -10^6 \\ \text{for } i \in 1..nEl \\ \quad \sigma_max \leftarrow \sigma E_M_i \text{ if } \sigma_max < \sigma E_M_i \\ \sigma_max \leftarrow \sigma_max \\ \sigma_max \end{array} \right.$$

Обчислення $\mathbf{n} = \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}}$ у скінченному елементі з номером k
перевірів Вірно

$$F = \sqrt{\frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + \frac{1}{2}(\sigma_2 - \sigma_3)^2 + \frac{1}{2}(\sigma_3 - \sigma_1)^2 + 3(\sigma_4^2 + \sigma_5^2 + \sigma_6^2)} - \sigma_y$$

$$\mathbf{n}_{_}(\sigma_{kp}) := \left| \begin{array}{l} \sigma_1 \leftarrow \sigma_{kp_1} \\ \sigma_2 \leftarrow \sigma_{kp_2} \\ \sigma_3 \leftarrow \sigma_{kp_3} \\ \sigma_4 \leftarrow \sigma_{kp_4} \\ \sigma_5 \leftarrow \sigma_{kp_5} \\ \sigma_6 \leftarrow \sigma_{kp_6} \end{array} \right.$$

$$\begin{aligned}
n_1 &\leftarrow \frac{d}{d\sigma_1} \sqrt{\frac{1}{2} \cdot [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2] + 3 \cdot [(\sigma_4)^2 + (\sigma_5)^2 + (\sigma_6)^2]} \\
n_2 &\leftarrow \frac{d}{d\sigma_2} \sqrt{\frac{1}{2} \cdot [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2] + 3 \cdot [(\sigma_4)^2 + (\sigma_5)^2 + (\sigma_6)^2]} \\
n_3 &\leftarrow \frac{d}{d\sigma_3} \sqrt{\frac{1}{2} \cdot [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2] + 3 \cdot [(\sigma_4)^2 + (\sigma_5)^2 + (\sigma_6)^2]} \\
n_4 &\leftarrow \frac{d}{d\sigma_4} \sqrt{\frac{1}{2} \cdot [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2] + 3 \cdot [(\sigma_4)^2 + (\sigma_5)^2 + (\sigma_6)^2]} \\
n_5 &\leftarrow \frac{d}{d\sigma_5} \sqrt{\frac{1}{2} \cdot [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2] + 3 \cdot [(\sigma_4)^2 + (\sigma_5)^2 + (\sigma_6)^2]} \\
n_6 &\leftarrow \frac{d}{d\sigma_6} \sqrt{\frac{1}{2} \cdot [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2] + 3 \cdot [(\sigma_4)^2 + (\sigma_5)^2 + (\sigma_6)^2]} \\
n
\end{aligned}$$

Обчислення $\frac{\partial \mathbf{n}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \frac{\partial^2 F}{\partial \boldsymbol{\sigma} \partial \boldsymbol{\sigma}}$ у скінченному елементі з номером k
перевірів Вірно

dn_dσ(σkp) :=

σ1 ← σkp₁

σ2 ← σkp₂

σ3 ← σkp₃

σ4 ← σkp₄

σ5 ← σkp₅

σ6 ← σkp₆

$$dn_{1,1} \leftarrow \frac{d}{d\sigma_1} \left[\frac{d}{d\sigma_1} \sqrt{\frac{1}{2} \cdot [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2] + 3 \cdot [(\sigma_4)^2 + (\sigma_5)^2 + (\sigma_6)^2]} \right]$$

$$dn_{1,2} \leftarrow \frac{d}{d\sigma_2} \left[\frac{d}{d\sigma_1} \sqrt{\frac{1}{2} \cdot [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2] + 3 \cdot [(\sigma_4)^2 + (\sigma_5)^2 + (\sigma_6)^2]} \right]$$

$$dn_{1,3} \leftarrow \frac{d}{d\sigma_3} \left[\frac{d}{d\sigma_1} \sqrt{\frac{1}{2} \cdot [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2] + 3 \cdot [(\sigma_4)^2 + (\sigma_5)^2 + (\sigma_6)^2]} \right]$$

$$dn_{1,4} \leftarrow \frac{d}{d\sigma_4} \left[\frac{d}{d\sigma_1} \sqrt{\frac{1}{2} \cdot [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2] + 3 \cdot [(\sigma_4)^2 + (\sigma_5)^2 + (\sigma_6)^2]} \right]$$

$$dn_{1,5} \leftarrow \frac{d}{d\sigma_5} \left[\frac{d}{d\sigma_1} \sqrt{\frac{1}{2} \cdot [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2] + 3 \cdot [(\sigma_4)^2 + (\sigma_5)^2 + (\sigma_6)^2]} \right]$$

$$dn_{1,6} \leftarrow \frac{d}{d\sigma_6} \left[\frac{d}{d\sigma_1} \sqrt{\frac{1}{2} \cdot [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2] + 3 \cdot [(\sigma_4)^2 + (\sigma_5)^2 + (\sigma_6)^2]} \right]$$

$$\begin{aligned}
dn_{5,1} &\leftarrow \frac{d}{d\sigma_1} \left[\frac{d}{d\sigma_5} \sqrt{\frac{1}{2} \cdot [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2] + 3 \cdot [(\sigma_4)^2 + (\sigma_5)^2 + (\sigma_6)^2]} \right] \\
dn_{5,2} &\leftarrow \frac{d}{d\sigma_2} \left[\frac{d}{d\sigma_5} \sqrt{\frac{1}{2} \cdot [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2] + 3 \cdot [(\sigma_4)^2 + (\sigma_5)^2 + (\sigma_6)^2]} \right] \\
dn_{5,3} &\leftarrow \frac{d}{d\sigma_3} \left[\frac{d}{d\sigma_5} \sqrt{\frac{1}{2} \cdot [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2] + 3 \cdot [(\sigma_4)^2 + (\sigma_5)^2 + (\sigma_6)^2]} \right] \\
dn_{5,4} &\leftarrow \frac{d}{d\sigma_4} \left[\frac{d}{d\sigma_5} \sqrt{\frac{1}{2} \cdot [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2] + 3 \cdot [(\sigma_4)^2 + (\sigma_5)^2 + (\sigma_6)^2]} \right] \\
dn_{5,5} &\leftarrow \frac{d}{d\sigma_5} \left[\frac{d}{d\sigma_5} \sqrt{\frac{1}{2} \cdot [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2] + 3 \cdot [(\sigma_4)^2 + (\sigma_5)^2 + (\sigma_6)^2]} \right] \\
dn_{5,6} &\leftarrow \frac{d}{d\sigma_6} \left[\frac{d}{d\sigma_5} \sqrt{\frac{1}{2} \cdot [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2] + 3 \cdot [(\sigma_4)^2 + (\sigma_5)^2 + (\sigma_6)^2]} \right] \\
dn_{6,1} &\leftarrow \frac{d}{d\sigma_1} \left[\frac{d}{d\sigma_6} \sqrt{\frac{1}{2} \cdot [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2] + 3 \cdot [(\sigma_4)^2 + (\sigma_5)^2 + (\sigma_6)^2]} \right] \\
dn_{6,2} &\leftarrow \frac{d}{d\sigma_2} \left[\frac{d}{d\sigma_6} \sqrt{\frac{1}{2} \cdot [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2] + 3 \cdot [(\sigma_4)^2 + (\sigma_5)^2 + (\sigma_6)^2]} \right] \\
dn_{6,3} &\leftarrow \frac{d}{d\sigma_3} \left[\frac{d}{d\sigma_6} \sqrt{\frac{1}{2} \cdot [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2] + 3 \cdot [(\sigma_4)^2 + (\sigma_5)^2 + (\sigma_6)^2]} \right] \\
dn_{6,4} &\leftarrow \frac{d}{d\sigma_4} \left[\frac{d}{d\sigma_6} \sqrt{\frac{1}{2} \cdot [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2] + 3 \cdot [(\sigma_4)^2 + (\sigma_5)^2 + (\sigma_6)^2]} \right] \\
dn_{6,5} &\leftarrow \frac{d}{d\sigma_5} \left[\frac{d}{d\sigma_6} \sqrt{\frac{1}{2} \cdot [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2] + 3 \cdot [(\sigma_4)^2 + (\sigma_5)^2 + (\sigma_6)^2]} \right] \\
dn_{6,6} &\leftarrow \frac{d}{d\sigma_6} \left[\frac{d}{d\sigma_6} \sqrt{\frac{1}{2} \cdot [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2] + 3 \cdot [(\sigma_4)^2 + (\sigma_5)^2 + (\sigma_6)^2]} \right] \\
dn &
\end{aligned}$$

Обчислення $Dr = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{r}_\sigma}{\partial \boldsymbol{\sigma}} & \frac{\partial \mathbf{r}_\sigma}{\partial \lambda} \\ \frac{\partial r_f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} & \frac{\partial r_f}{\partial \lambda} \end{bmatrix} \quad \begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{r}_\sigma}{\partial \boldsymbol{\sigma}} &= \mathbf{I} + \Delta \lambda \mathbf{D}^e \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} & \frac{\partial \mathbf{r}_\sigma}{\partial \lambda} &= \mathbf{D}^e \mathbf{n} \\ \frac{\partial r_f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} &= \mathbf{n}^T & \frac{\partial r_f}{\partial \lambda} &= -h \end{aligned}$

у скінченному елементі з номером k

```

Dr( $\sigma_{kp}, \Delta\lambda$ ) :=
  for i ∈ 1..7
    for j ∈ 1..7
      Dri,j ← 0
    K ←  $\Delta\lambda \cdot D(E, \nu) \cdot dn\_d\sigma(\sigma_{kp})$ 
    for i ∈ 1..6
      for j ∈ 1..6
        Dri,j ← Dri,j + Ki,j
    for i ∈ 1..6
      Dri,i ← Dri,i + 1
  n ← n_( $\sigma_{kp}$ )
  d $\sigma\_d\lambda$  ← D(E,  $\nu$ ) · n
  for i ∈ 1..6
    Dri,7 ← Dri,7 + d $\sigma\_d\lambda$ i
  for i ∈ 1..6
    Dr7,i ← Dr7,i + ni
  Dr7,7 ← Dr7,7 - H-
  Dr

```

Обчислення девіаторних напружень S у скінченному елементі з номером k

```

S_( $\sigma$ ) :=
   $\sigma_m$  ←  $\frac{(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)}{3}$ 
  S1 ←  $\sigma_1 - \sigma_m$ 
  S2 ←  $\sigma_2 - \sigma_m$ 
  S3 ←  $\sigma_3 - \sigma_m$ 
  S4 ←  $\sigma_4$ 
  S5 ←  $\sigma_5$ 
  S6 ←  $\sigma_6$ 
  S

```

Обчислення еквівалентного напруження σ_{eq_M} за Мізесом у скінченному елементі з номером k

```

 $\sigma_{eq\_M}(\sigma)$  :=
  S ← S_( $\sigma$ )
   $\sigma\_M$  ←  $\sqrt{\frac{3}{2} \cdot [(S_1)^2 + (S_2)^2 + (S_3)^2 + 2 \cdot [(S_4)^2 + (S_5)^2 + (S_6)^2]}$ 
   $\sigma\_M$ 

```

Обчислення неувязки r_σ у скінченному елементі з номером k

$$\mathbf{r}_\sigma = \boldsymbol{\sigma}_{k+1} - \boldsymbol{\sigma}^{e(tr)} + \Delta\lambda \mathbf{D}^e \mathbf{n}(\boldsymbol{\sigma}_{k+1}, \lambda_{k+1})$$

$$r_\sigma(\sigma_{kp}, \sigma_{tr}, \sigma_y, \Delta\lambda) := \left| \begin{array}{l} \text{for } i \in 1..6 \\ \quad \left| \begin{array}{l} \sigma_i \leftarrow \sigma_{kp_i} \\ \sigma_{e_i} \leftarrow \sigma_{tr_i} \end{array} \right. \\ \quad K \leftarrow \Delta\lambda \cdot D(E, \nu) \cdot n_-(\sigma_{kp}) \\ \quad r_\sigma \leftarrow \sigma - \sigma_e + K \\ \quad r_\sigma \end{array} \right.$$

Обчислення прирощення початкових напружень у скінченному елементі

$$\Delta\sigma(\sigma_{kp}, \sigma_{tr}) := \left| \begin{array}{l} \text{for } i \in 1..6 \\ \quad \left| \begin{array}{l} \sigma_i \leftarrow \sigma_{kp_i} \\ \sigma_{e_i} \leftarrow \sigma_{tr_i} \end{array} \right. \\ \quad \Delta\sigma \leftarrow \sigma_e - \sigma \\ \quad \Delta\sigma \end{array} \right.$$

Обчислення неувязки r_f у скінченному елементі з номером k

$$r_f = \sqrt{\frac{3}{2} \mathbf{S} : \mathbf{S} - \sigma_{y0} - h \varepsilon_{eq}^{pl}}$$

$$r_f(\sigma_{kp}, \sigma_y) := \left| \begin{array}{l} \sigma_{eq} \leftarrow \sigma_{eq_M}(\sigma_{kp}) \\ rf \leftarrow \sigma_{eq} - \sigma_y \\ rf \end{array} \right.$$

Обчислення вектора прирощення пластичних деформацій ε_{pl} у скінченному елементі з номером k

$$\varepsilon_{pl}(\Delta\lambda, \sigma_{kp}) := \left| \begin{array}{l} \mathbf{n} \leftarrow \mathbf{n}_-(\sigma_{kp}) \\ \varepsilon_{pl} \leftarrow \Delta\lambda \cdot \mathbf{n} \\ \varepsilon_{pl} \end{array} \right. \quad \boldsymbol{\varepsilon}^{pl} = \Delta\lambda \mathbf{n}$$

Обчислення еквівалентної пластичної деформації ε_{pl_eq} за Мізесом у скінченному елементі

$$\varepsilon_{pl_eq}(\varepsilon_{pl}) := \frac{1}{\sqrt{2} \cdot (1 + \nu)} \cdot \sqrt{(\varepsilon_{pl_1} - \varepsilon_{pl_2})^2 + (\varepsilon_{pl_2} - \varepsilon_{pl_3})^2 + (\varepsilon_{pl_3} - \varepsilon_{pl_1})^2 + \frac{3}{2} \cdot [(\varepsilon_{pl_4})^2 + (\varepsilon_{pl_5})^2 + (\varepsilon_{pl_6})^2]}$$

Уточнення значення границі текучості σ_y у скінченному елементі

$$\sigma_y(\varepsilon_{pl_eq}) := \sigma_{T0} + H_- \cdot \varepsilon_{pl_eq}$$

Визначення вектора неувязки $r_{\sigma f}$ у скінченному елементі

$$r_{\sigma f}(\sigma_{kp}, \sigma_{tr}, \sigma_y, \Delta\lambda) := \begin{cases} \varepsilon_{pl} \leftarrow \varepsilon_{pl}(\Delta\lambda, \sigma_{kp}) \\ \varepsilon_{pl_eq} \leftarrow \varepsilon_{pl_eq}(\varepsilon_{pl}) \\ \sigma_y \leftarrow \sigma_y(\varepsilon_{pl_eq}) \\ \text{for } i \in 1..7 \\ \quad r_{\sigma f_i} \leftarrow 0 \\ r_{\sigma_-} \leftarrow r_{\sigma}(\sigma_{kp}, \sigma_{tr}, \sigma_y, \Delta\lambda) \\ r_{f_-} \leftarrow r_f(\sigma_{kp}, \sigma_y) \\ \text{for } i \in 1..6 \\ \quad r_{\sigma f_i} \leftarrow r_{\sigma f_i} + r_{\sigma_-i} \\ r_{\sigma f_7} \leftarrow r_{\sigma f_7} + r_{f_-} \\ r_{\sigma f} \end{cases}$$

Обчислення еквівалентного напруження по СЕ

$$\sigma_{E_M}(\sigma) := \begin{cases} \text{for } k \in 1..nEl \\ \sigma_{E_M_k} \leftarrow \sqrt{\frac{1}{2} \cdot (\sigma_{k,1} - \sigma_{k,2})^2 + \frac{1}{2} \cdot (\sigma_{k,2} - \sigma_{k,3})^2 + \frac{1}{2} \cdot (\sigma_{k,3} - \sigma_{k,1})^2 + 3 \cdot [(\sigma_{k,4})^2 + (\sigma_{k,5})^2 + (\sigma_{k,6})^2]} \\ \sigma_{E_M} \end{cases}$$

Розв'язок

Початкові напруження - нульові

$$\Delta\sigma_0 := \begin{cases} \text{for } k \in 1..nEl \\ \quad \text{for } i \in 1..6 \\ \quad \quad \sigma_{k,i} \leftarrow 0 \\ \sigma \end{cases}$$

Обчислення еквівалентних напружень та деформацій

$$e_{ekv_M}(\varepsilon) := \begin{cases} \text{for } k \in 1..nEl \\ e_{M_k} \leftarrow \sqrt{\frac{2}{3} \cdot [(\varepsilon_{k,1})^2 + (\varepsilon_{k,2})^2 + (\varepsilon_{k,3})^2 + 2 \cdot [(\varepsilon_{k,4})^2 + (\varepsilon_{k,5})^2 + (\varepsilon_{k,6})^2]]} \\ e_M \end{cases}$$

$$e_{ekv_M}(\varepsilon) := \begin{cases} \text{for } k \in 1..nEl \\ e_{M_k} \leftarrow \frac{1}{\sqrt{2} \cdot (1 + \nu)} \cdot \sqrt{(\varepsilon_{k,1} - \varepsilon_{k,2})^2 + (\varepsilon_{k,2} - \varepsilon_{k,3})^2 + (\varepsilon_{k,3} - \varepsilon_{k,1})^2 + \frac{3}{2} \cdot [(\varepsilon_{k,4})^2 + (\varepsilon_{k,5})^2 + (\varepsilon_{k,6})^2]} \\ e_M \end{cases}$$

$N\beta := 1$

```

σ2 := for k ∈ 1..nEl
      | εP1_eq_k ← 0
      | Δλλ_k ← 0
      | σy_k ← σT0
      | for i ∈ 1..6
      |   | σkp_{k,i} ← 0
      |   | σ0_{k,i} ← 0
      |   | σ0_prev_{k,i} ← 0
      |
      | β ← 1
      | U ← U_(β,σ0)
      | for Iter2 ∈ 1..Nβ
      |   | εe ← ε_(U)
      |   | σ_tr ← σ_(εe)
      |   | σkp ← σ_tr
      |   | σE_M ← σE_M_(σ_tr)
      |   | for k ∈ 1..nEl
      |   |   | El_p1_k ← 0
      |   |   | El_p1_k ← 1 if σE_M_k ≥ σy_k
      |   |   | for k ∈ 1..nEl
      |   |   |   | Δλ ← 0
      |   |   |   | σy_ ← σy_k
      |   |   |   | if El_p1_k = 1
      |   |   |   |   | σλk_7 ← 0
      |   |   |   |   | for i ∈ 1..6
      |   |   |   |   |   | σλk_i ← σkp_{k,i}
      |   |   |   |   |   | σtr_i ← σ_tr_{k,i}
      |   |   |   |   | for j ∈ 1..6
      |   |   |   |   |   | DR ← Dr(σλk, Δλ)
      |   |   |   |   |   | R_of ← r_of(σλk, σtr, σy_, Δλ)
      |   |   |   |   |   | σ_er ← lsolve(DR, R_of)

```

```

|   |   |   |  $\sigma\lambda_k \leftarrow \sigma\lambda_k - \sigma_{er}$ 
|   |   |   |  $\sigma_0 \leftarrow \Delta\sigma(\sigma\lambda_k, \sigma_{tr})$ 
|   |   |   |  $\Delta\lambda \leftarrow \sigma\lambda_k$ 
|   |   |   |
|   |   |   | for  $i \in 1..6$ 
|   |   |   | |  $\sigma_{kp_{k,i}} \leftarrow \sigma\lambda_{k_i}$ 
|   |   |   | |  $\sigma R_i \leftarrow \sigma\lambda_{k_i}$ 
|   |   |   | |  $\sigma^0_{k,i} \leftarrow \sigma_{-0_i}$ 
|   |   |   |  $\varepsilon_{Pleq} \leftarrow \varepsilon_{pl\_eq}(\varepsilon_{pl}(\Delta\lambda, \sigma R))$ 
|   |   |   |  $\sigma y_k \leftarrow \sigma_y(\varepsilon_{Pleq})$ 
|   |   |   |  $\sigma E_M_k \leftarrow \sigma_{eq\_M}(\sigma R)$ 
|   |   |   |  $\varepsilon_{Pl\_eq_k} \leftarrow \varepsilon_{Pleq}$ 
|   |   |   |
|   |   |   |  $\Delta\lambda\lambda_k \leftarrow \sigma\lambda_k$ 
|   |   |   |  $aa2 \leftarrow 2$ 
|   |   |   |
|   |   |   |  $aa3 \leftarrow 3$ 
|   |   |   |
|   |   |   |  $\beta \leftarrow 0$ 
|   |   |   |  $\Delta U \leftarrow U_-(\beta, \sigma_0 - \sigma_{0\_prev})$ 
|   |   |   |  $U \leftarrow U + \Delta U$ 
|   |   |   |  $\sigma_{0\_prev} \leftarrow \sigma_0$ 
|   |   |   |  $StopIter \leftarrow 0$ 
|   |   |   |
|   |   |   |  $\sigma E_M \leftarrow \sigma E_M_-(\sigma_{kp})$ 
|   |   |   |  $\sigma E_{M1} \leftarrow \sigma E_M_-(\sigma_{tr})$ 
|   |   |   | for  $i \in 1..3Nnod\_gl$ 
|   |   |   | |  $\sigma_{i,7} \leftarrow U_i$ 
|   |   |   | |  $\sigma_{i,8} \leftarrow \Delta U_i$ 
|   |   |   | for  $k \in 1..nEl$ 
|   |   |   | |  $\sigma_{k,9} \leftarrow \sigma E_M_k$ 
|   |   |   | |  $\sigma_{k,10} \leftarrow \sigma E_{M1_k}$ 
|   |   |   | |  $\sigma_{k,11} \leftarrow \varepsilon_{Pl\_eq_k}$ 
|   |   |   | |  $\sigma_{k,12} \leftarrow El_{pl}_k$ 
|   |   |   | |  $\sigma_{k,13} \leftarrow \sigma y_k$ 

```

```

|  $\sigma_{k,15} \leftarrow \Delta\lambda\lambda_k$ 
| for  $i \in 1..6$ 
|    $\sigma_{k,i} \leftarrow \sigma_{kp_{k,i}}$ 
|   for  $i \in 1..6$ 
|      $\sigma_{k,15+i} \leftarrow \sigma_{-tr_{k,i}}$ 
|     for  $i \in 1..6$ 
|        $\sigma_{k,21+i} \leftarrow \sigma_{k,i}^0$ 
|  $\sigma_{2,14} \leftarrow \sigma_{T0}$ 
| Stop  $\leftarrow 0$ 
|  $\sigma$ 

```

```

El_pl := | for  $k \in 1..nEl$ 
|    $El_{pl_k} \leftarrow \sigma_{k,12}^2$ 
| El_pl

```

+Визначення векторів переміщень U_x, U_y, U_z у вузлах

```

Ux := | for  $i \in 1..Nnod\_gl$ 
|    $U_{x_i} \leftarrow U_{3,i-2}$ 
| Ux
Uy := | for  $i \in 1..Nnod\_gl$ 
|    $U_{y_i} \leftarrow U_{3,i-1}$ 
| Uy
Uz := | for  $i \in 1..Nnod\_gl$ 
|    $U_{z_i} \leftarrow U_{3,i}$ 
| Uz

```

Визначення вектору сумарних переміщень U_{sum} у вузлах

```

Usum := | for  $i \in 1..Nnod\_gl$ 
|    $U_{sum_i} \leftarrow \sqrt{(U_{x_i})^2 + (U_{y_i})^2 + (U_{z_i})^2}$ 
| Usum

```

**Обчислення компонент пружно-пластичної деформації
($\epsilon_{xx}, \epsilon_{yy}, \epsilon_{zz}, \epsilon_{xy}, \epsilon_{yz}, \epsilon_{xz}$) по елементах**

```

 $\underline{\epsilon}_{\omega\omega}$  := | for  $k \in 1..nEl$ 
|   for  $i \in 1..M$ 
|      $igl \leftarrow El\_nod_{k,i}^3$ 
|      $ii \leftarrow i-3$ 
|      $U\_El_{ii-2} \leftarrow U_{igl-2}$ 
|      $U\_El_{ii-1} \leftarrow U_{igl-1}$ 
|      $U\_El_{ii} \leftarrow U_{igl}$ 
|     for  $i \in 1..M$ 
|        $j \leftarrow El\_nod_{k,i}$ 
|        $XYZ_{i,1} \leftarrow XYZ_{gl_j,1}$ 
|        $XYZ_{i,2} \leftarrow XYZ_{gl_j,2}$ 
|        $XYZ_{i,3} \leftarrow XYZ_{gl_j,3}$ 
|      $\epsilon\_El \leftarrow B(XYZ) \cdot U\_El$ 
|     for  $i \in 1..6$ 
|        $\epsilon_{k,i} \leftarrow \epsilon\_El_i$ 
|  $\epsilon$ 

```

Компоненти пружних напружень (σ_{xx} , σ_{yy} , σ_{zz} , σ_{xy} , σ_{yz} , σ_{xz}) по елементах

```

σ := | for k ∈ 1..nEl
      |   for i ∈ 1..6
      |     σk,i ← σ2k,i
      | σ

```

Обчислення еквівалентного напруження по СЕ

$$\sigma_{ekvM} = \left[\frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + \frac{1}{2}(\sigma_2 - \sigma_3)^2 + \frac{1}{2}(\sigma_3 - \sigma_1)^2 + 3(\sigma_4^2 + \sigma_5^2 + \sigma_6^2) \right]^{1/2}$$

```

σE_M := | for k ∈ 1..nEl
          |   σE_Mk ←  $\sqrt{\frac{1}{2}(\sigma_{k,1} - \sigma_{k,2})^2 + \frac{1}{2}(\sigma_{k,2} - \sigma_{k,3})^2 + \frac{1}{2}(\sigma_{k,3} - \sigma_{k,1})^2 + 3[(\sigma_{k,4})^2 + (\sigma_{k,5})^2 + (\sigma_{k,6})^2]}$ 
          | σE_M

```

Обчислення компонент пружно-пластичної деформації (ε_{xx} , ε_{yy} , ε_{zz} , ε_{xy} , ε_{yz} , ε_{xz}) у вузлах

```

ε_node := | for i ∈ 1..Nnod_gl
            |   k_cout ← 0
            |   rΣ ← 0
            |   εxx ← 0
            |   εyy ← 0
            |   εzz ← 0
            |   εxy ← 0
            |   εyz ← 0
            |   εxz ← 0
            |   for k ∈ 1..nEl
            |     for il ∈ 1..M
            |       j ← El_nodk,il
            |       XYZil,1 ← XYZgl,j,1
            |       XYZil,2 ← XYZgl,j,2
            |       XYZil,3 ← XYZgl,j,3
            |       x_c ←  $\frac{XYZ_{1,1} + XYZ_{2,1} + XYZ_{3,1} + XYZ_{4,1}}{4}$ 
            |       y_c ←  $\frac{XYZ_{1,2} + XYZ_{2,2} + XYZ_{3,2} + XYZ_{4,2}}{4}$ 

```

$$z_c \leftarrow \frac{XYZ_{1,2} + XYZ_{2,2} + XYZ_{3,3} + XYZ_{4,3}}{4}$$

for $j \in 1..M$

node \leftarrow El_nod_{k,j}

if node = i

$$r \leftarrow \sqrt{(XYZgl_{i,1} - x_c)^2 + (XYZgl_{i,2} - y_c)^2 + (XYZgl_{i,3} - z_c)^2}$$

$$k_cout \leftarrow k_cout + 1$$

$$r\Sigma \leftarrow r\Sigma + \frac{1}{r}$$

$$\varepsilon_{xx} \leftarrow \varepsilon_{xx} + \frac{\varepsilon_{k,1}}{r}$$

$$\varepsilon_{yy} \leftarrow \varepsilon_{yy} + \frac{\varepsilon_{k,2}}{r}$$

$$\varepsilon_{zz} \leftarrow \varepsilon_{zz} + \frac{\varepsilon_{k,3}}{r}$$

$$\varepsilon_{xy} \leftarrow \varepsilon_{xy} + \frac{\varepsilon_{k,4}}{r}$$

$$\varepsilon_{yz} \leftarrow \varepsilon_{yz} + \frac{\varepsilon_{k,5}}{r}$$

$$\varepsilon_{xz} \leftarrow \varepsilon_{xz} + \frac{\varepsilon_{k,6}}{r}$$

if k_cout > 0

$$\varepsilon_{xx} \leftarrow \frac{\varepsilon_{xx}}{r\Sigma}$$

$$\varepsilon_{yy} \leftarrow \frac{\varepsilon_{yy}}{r\Sigma}$$

$$\varepsilon_{zz} \leftarrow \frac{\varepsilon_{zz}}{r\Sigma}$$

$$\varepsilon_{xy} \leftarrow \frac{\varepsilon_{xy}}{r\Sigma}$$

$$\varepsilon_{yz} \leftarrow \frac{\varepsilon_{yz}}{r\Sigma}$$

$$\varepsilon_{xz} \leftarrow \frac{\varepsilon_{xz}}{r\Sigma}$$

```

ε_nodei,1 ← εxx
ε_nodei,2 ← εyy
ε_nodei,3 ← εzz
ε_nodei,4 ← εxy
ε_nodei,5 ← εyz
ε_nodei,6 ← εxz
ε_node

```

Обчислення компонент напружень (σ_{xx} , σ_{yy} , σ_{zz} , σ_{xy} , σ_{yz} , σ_{xz}) у вузлах CE

```

σ_node := for i ∈ 1..Nnod_gl
    k_cout ← 0
    rΣ ← 0
    σxx ← 0
    σyy ← 0
    σzz ← 0
    σxy ← 0
    σyz ← 0
    σxz ← 0
    for k ∈ 1..nEl
        for il ∈ 1..M
            j ← El_nodk,il
            XYZil,1 ← XYZj,1gl
            XYZil,2 ← XYZj,2gl
            XYZil,3 ← XYZj,3gl
            x_c ←  $\frac{XYZ_{1,1} + XYZ_{2,1} + XYZ_{3,1} + XYZ_{4,1}}{4}$ 
            y_c ←  $\frac{XYZ_{1,2} + XYZ_{2,2} + XYZ_{3,2} + XYZ_{4,2}}{4}$ 
            z_c ←  $\frac{XYZ_{1,3} + XYZ_{2,3} + XYZ_{3,3} + XYZ_{4,3}}{4}$ 
            for j ∈ 1..M
                node ← El_nodk,j
                if node = i

```

					$r \leftarrow \sqrt{(XYZg_{i,1}^1 - x_c)^2 + (XYZg_{i,2}^1 - y_c)^2 + (XYZg_{i,3}^1 - z_c)^2}$
					$k_cout \leftarrow k_cout + 1$
					$r\Sigma \leftarrow r\Sigma + \frac{1}{r}$
					$\sigma_{xx} \leftarrow \sigma_{xx} + \frac{\sigma_{k,1}}{r}$
					$\sigma_{yy} \leftarrow \sigma_{yy} + \frac{\sigma_{k,2}}{r}$
					$\sigma_{zz} \leftarrow \sigma_{zz} + \frac{\sigma_{k,3}}{r}$
					$\sigma_{xy} \leftarrow \sigma_{xy} + \frac{\sigma_{k,4}}{r}$
					$\sigma_{yz} \leftarrow \sigma_{yz} + \frac{\sigma_{k,5}}{r}$
					$\sigma_{xz} \leftarrow \sigma_{xz} + \frac{\sigma_{k,6}}{r}$
				if $k_cout > 0$	
					$\sigma_{xx} \leftarrow \frac{\sigma_{xx}}{r\Sigma}$
					$\sigma_{yy} \leftarrow \frac{\sigma_{yy}}{r\Sigma}$
					$\sigma_{zz} \leftarrow \frac{\sigma_{zz}}{r\Sigma}$
					$\sigma_{xy} \leftarrow \frac{\sigma_{xy}}{r\Sigma}$
					$\sigma_{yz} \leftarrow \frac{\sigma_{yz}}{r\Sigma}$
					$\sigma_{xz} \leftarrow \frac{\sigma_{xz}}{r\Sigma}$
					$\sigma_node_{i,1} \leftarrow \sigma_{xx}$
					$\sigma_node_{i,2} \leftarrow \sigma_{yy}$
					$\sigma_node_{i,3} \leftarrow \sigma_{zz}$
					$\sigma_node_{i,4} \leftarrow \sigma_{xy}$
					$\sigma_node_{i,5} \leftarrow \sigma_{yz}$
					$\sigma_node_{i,6} \leftarrow \sigma_{xz}$
				σ_node	

$$\sigma_{\text{Ekv_M}} := \left| \begin{array}{l} \text{for } k \in 1..n\text{El} \\ \sigma_k \leftarrow \sigma_{k,9}^2 \\ \sigma \end{array} \right. \quad \sigma_{\text{Ekv_PL}} := \left| \begin{array}{l} \text{for } k \in 1..n\text{El} \\ \sigma_k \leftarrow \sigma_{k,10}^2 \\ \sigma \end{array} \right. \quad \varepsilon_{\text{Ekv_PL}} := \left| \begin{array}{l} \text{for } k \in 1..n\text{El} \\ \varepsilon_k \leftarrow \sigma_{k,11}^2 \\ \varepsilon \end{array} \right.$$

Обчислення еквівалентних напружень у вузлах СЕ

$$\sigma_{\text{ekv_n}} := \left| \begin{array}{l} \text{for } i \in 1..N\text{nod_gl} \\ \quad k_cout \leftarrow 0 \\ \quad r\Sigma \leftarrow 0 \\ \quad \sigma_{\text{Ekv}} \leftarrow 0 \\ \quad \text{for } k \in 1..n\text{El} \\ \quad \quad \text{for } i1 \in 1..M \\ \quad \quad \quad j \leftarrow \text{El_nod}_{k,i1} \\ \quad \quad \quad \text{XYZ}_{i1,1} \leftarrow \text{XYZgl}_{j,1} \\ \quad \quad \quad \text{XYZ}_{i1,2} \leftarrow \text{XYZgl}_{j,2} \\ \quad \quad \quad \text{XYZ}_{i1,3} \leftarrow \text{XYZgl}_{j,3} \\ \quad \quad \quad x_c \leftarrow \frac{\text{XYZ}_{1,1} + \text{XYZ}_{2,1} + \text{XYZ}_{3,1} + \text{XYZ}_{4,1}}{4} \\ \quad \quad \quad y_c \leftarrow \frac{\text{XYZ}_{1,2} + \text{XYZ}_{2,2} + \text{XYZ}_{3,2} + \text{XYZ}_{4,2}}{4} \\ \quad \quad \quad z_c \leftarrow \frac{\text{XYZ}_{1,3} + \text{XYZ}_{2,3} + \text{XYZ}_{3,3} + \text{XYZ}_{4,3}}{4} \\ \quad \quad \quad \text{for } j \in 1..M \\ \quad \quad \quad \quad \text{node} \leftarrow \text{El_nod}_{k,j} \\ \quad \quad \quad \quad \text{if node} = i \\ \quad \quad \quad \quad \quad r \leftarrow \sqrt{(\text{XYZgl}_{i,1} - x_c)^2 + (\text{XYZgl}_{i,2} - y_c)^2 + (\text{XYZgl}_{i,3} - z_c)^2} \\ \quad \quad \quad \quad \quad k_cout \leftarrow k_cout + 1 \\ \quad \quad \quad \quad \quad r\Sigma \leftarrow r\Sigma + \frac{1}{r} \\ \quad \quad \quad \quad \quad \sigma_{\text{Ekv}} \leftarrow \sigma_{\text{Ekv}} + \frac{\sigma_{\text{E_M}_k}}{r} \\ \quad \quad \quad \sigma_{\text{Ekv}} \leftarrow \frac{\sigma_{\text{Ekv}}}{r\Sigma} \text{ if } k_cout > 0 \\ \quad \quad \sigma_{\text{node}_i} \leftarrow \sigma_{\text{Ekv}} \\ \sigma_{\text{node}} \end{array} \right.$$

Обчислення еквівалентних пластичних деформацій у вузлах CE

```

ε_ekv_PL := for i ∈ 1..Nnod_gl
    k_cout ← 0
    rΣ ← 0
    εEkv ← 0
    for k ∈ 1..nEl
        for il ∈ 1..M
            j ← El_nod_k,il
            XYZil,1 ← XYZgl,j,1
            XYZil,2 ← XYZgl,j,2
            XYZil,3 ← XYZgl,j,3
        -----
        x_c ←  $\frac{XYZ_{1,1} + XYZ_{2,1} + XYZ_{3,1} + XYZ_{4,1}}{4}$ 
        y_c ←  $\frac{XYZ_{1,2} + XYZ_{2,2} + XYZ_{3,2} + XYZ_{4,2}}{4}$ 
        z_c ←  $\frac{XYZ_{1,3} + XYZ_{2,3} + XYZ_{3,3} + XYZ_{4,3}}{4}$ 
        for j ∈ 1..M
            node ← El_nod_k,j
            if node = i
                r ←  $\sqrt{(XYZ_{gl,i,1} - x_c)^2 + (XYZ_{gl,i,2} - y_c)^2 + (XYZ_{gl,i,3} - z_c)^2}$ 
                k_cout ← k_cout + 1
                rΣ ← rΣ +  $\frac{1}{r}$ 
                εEkv ← εEkv +  $\frac{\varepsilon_{Ekv\_PL\_k}}{r}$ 
        εEkv ←  $\frac{\varepsilon_{Ekv}}{r\Sigma}$  if k_cout > 0
    ε_nodei ← εEkv
ε_node

```

Обчислення еквівалентної за Мізесом пружної деформації у вузлах

```

ε_ekv_EL := for i ∈ 1..Nnod_gl
    ε_ekv_ELi ←  $\frac{1}{\sqrt{2(1+\nu)}} \cdot \sqrt{(\varepsilon_{node_{i,1}} - \varepsilon_{node_{i,2}})^2 + (\varepsilon_{node_{i,2}} - \varepsilon_{node_{i,3}})^2 + (\varepsilon_{node_{i,3}} - \varepsilon_{node_{i,1}})^2 + \frac{3}{2}[(\varepsilon_{node_{i,4}})^2 + (\varepsilon_{node_{i,5}})^2 + (\varepsilon_{node_{i,6}})^2]} - \varepsilon_{ekv\_PL_i}$ 
    ε_ekv_EL

```

Визначення еквівалентного напруження за Мізесом σ_{ekv_n} у вузлах CE

```

 $\sigma_{ekv\_n} :=$  for  $i \in 1..Nnod\_gl$ 
     $s1 \leftarrow (\sigma_{node_{i,1}} - \sigma_{node_{i,2}})^2$ 
     $s2 \leftarrow (\sigma_{node_{i,2}} - \sigma_{node_{i,3}})^2$ 
     $s3 \leftarrow (\sigma_{node_{i,3}} - \sigma_{node_{i,1}})^2$ 
     $s4 \leftarrow 6 \cdot [(\sigma_{node_{i,4}})^2 + (\sigma_{node_{i,5}})^2 + (\sigma_{node_{i,6}})^2]$ 
     $\sigma_{ekv\_n_i} \leftarrow \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sqrt{s1 + s2 + s3 + s4}$ 
 $\sigma_{ekv\_n}$ 

```

Формування файлу результатів Result_1 недеформований стан

```

Result_1 := for  $i \in 1..Nnod\_gl$ 
    Result_1i,1  $\leftarrow$  XYZgli,1
    Result_1i,2  $\leftarrow$  XYZgli,2
    Result_1i,3  $\leftarrow$  XYZgli,3
    Result_1i,4  $\leftarrow$  Uxi
    Result_1i,5  $\leftarrow$  Uyi
    Result_1i,6  $\leftarrow$  Uzi
    Result_1i,7  $\leftarrow$  Usumi
    Result_1i,8  $\leftarrow$   $\sigma_{node_{i,1}}$ 
    Result_1i,9  $\leftarrow$   $\sigma_{node_{i,2}}$ 
    Result_1i,10  $\leftarrow$   $\sigma_{node_{i,3}}$ 
    Result_1i,11  $\leftarrow$   $\sigma_{ekv\_n_i}$ 
    Result_1i,12  $\leftarrow$   $\sigma_{ekv\_PL_i}$ 
    Result_1i,13  $\leftarrow$   $\varepsilon_{ekv\_EL_i}$ 
    Result_1i,14  $\leftarrow$   $\varepsilon_{ekv\_PL_i}$ 
    Result_1i,15  $\leftarrow$   $\varepsilon_{ekv\_EL_i} + \varepsilon_{ekv\_PL_i}$ 
    Result_1i,16  $\leftarrow$  Nodes_PLi
Result_1

```

Перезапис номерів вузлів CE
(видаляємо 4-й рядок, в якому
записано номери CE)

```
El_nod3 := | for k ∈ 1..nEl
            |   for j ∈ 1..M
            |     El_nod3k,j ← El_nodk,j
            | El_nod3
```

Запис файлів результатів



...\Result_1.dat

Result_1



D...\NNodes_Elements.dat

El_nod3

A.4. Задача пружно-пластичної поведінки сипкого матеріалу

Оскільки файл **Pl_RMA_DP.xmcd**, за винятком декількох функцій, збігається з файлом **Pl_RMA_MIZES_Biso.xmcd**, то в цьому додатку наведено тільки фрагменти програмного коду **Pl_RMA_DP.xmcd** (функції, які відрізняються), який розроблено за математичною постановкою та числовою методикою розв'язання задачі, що наведена в розділі 4 (див. підрозділи 4.1–4.3).

Обчислення девіаторних пружних напружень по CE

$$\begin{aligned}
 S_E(\sigma) := & \text{for } k \in 1..nEl \\
 & p \leftarrow \frac{(\sigma_{k,1} + \sigma_{k,2} + \sigma_{k,3})}{3} \\
 & S_{-k,1} \leftarrow \sigma_{k,1} - p \\
 & S_{-k,2} \leftarrow \sigma_{k,2} - p \\
 & S_{-k,3} \leftarrow \sigma_{k,3} - p \\
 & S_{-k,4} \leftarrow \sigma_{k,4} \\
 & S_{-k,5} \leftarrow \sigma_{k,5} \\
 & S_{-k,6} \leftarrow \sigma_{k,6} \\
 & S_
 \end{aligned}
 \quad \sigma_{eq} = \beta \sigma_{kk} + \sqrt{\frac{1}{2} S_{ij} S_{ij}}$$

Обчислення еквівалентного напруження ДП моделі по CE

$$\begin{aligned}
 \sigma_{EqDP}(\sigma, \beta) := & S \leftarrow S_E(\sigma) \\
 & \text{for } k \in 1..nEl \\
 & \sigma_{E_DPk} \leftarrow \sqrt{\frac{1}{2} \left[(S_{k,1})^2 + (S_{k,2})^2 + (S_{k,3})^2 + 2 \left[(S_{k,4})^2 + (S_{k,5})^2 + (S_{k,6})^2 \right] \right]} + \beta \cdot (\sigma_{k,1} + \sigma_{k,2} + \sigma_{k,3}) \\
 & \sigma_{E_DP}
 \end{aligned}
 \quad \sigma_{eq} = \beta I_1 + \sqrt{J_2},$$

Обчислення девіаторних напружень S у скінченному елементі

$$\begin{aligned}
 S_(\sigma) := & \sigma_m \leftarrow \frac{(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)}{3} \\
 & S_1 \leftarrow \sigma_1 - \sigma_m \\
 & S_2 \leftarrow \sigma_2 - \sigma_m \\
 & S_3 \leftarrow \sigma_3 - \sigma_m \\
 & S_4 \leftarrow \sigma_4 \\
 & S_5 \leftarrow \sigma_5 \\
 & S_6 \leftarrow \sigma_6 \\
 & S
 \end{aligned}$$

Обчислення $\mathbf{n} = \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \beta + \frac{\mathbf{S}}{2\sqrt{\frac{1}{2}\mathbf{S}:\mathbf{S}}}$ у скінченному елементі
перевірів Вірно

$\mathbf{n}_{(\sigma_{kp}, \beta)} :=$

$$\begin{aligned} & \mathbf{S} \leftarrow \mathbf{S}_{(\sigma_{kp})} \\ & sq_J2 \leftarrow \sqrt{\frac{1}{2} \cdot \left[(S_1)^2 + (S_2)^2 + (S_3)^2 + 2 \cdot \left[(S_4)^2 + (S_5)^2 + (S_6)^2 \right] \right]} \\ & n_1 \leftarrow \beta + \frac{S_1}{2 \cdot sq_J2} \\ & n_2 \leftarrow \beta + \frac{S_2}{2 \cdot sq_J2} \\ & n_3 \leftarrow \beta + \frac{S_3}{2 \cdot sq_J2} \\ & n_4 \leftarrow \beta + \frac{S_4}{sq_J2} \\ & n_5 \leftarrow \beta + \frac{S_5}{sq_J2} \\ & n_6 \leftarrow \beta + \frac{S_6}{sq_J2} \\ & \mathbf{n} \end{aligned}$$

Обчислення $\frac{\partial \mathbf{n}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \frac{\partial^2 F}{\partial \boldsymbol{\sigma}^2}$ у скінченному елементі

$$F = 3\beta\sigma_m + \sqrt{\frac{1}{2}\mathbf{S}:\mathbf{S}} - \sigma_y$$

$\mathbf{dn}_{d\sigma(\sigma_{kp}, \beta)} :=$

$$\begin{aligned} & \sigma_1 \leftarrow \sigma_{kp_1} \\ & \sigma_2 \leftarrow \sigma_{kp_2} \\ & \sigma_3 \leftarrow \sigma_{kp_3} \\ & \sigma_4 \leftarrow \sigma_{kp_4} \\ & \sigma_5 \leftarrow \sigma_{kp_5} \\ & \sigma_6 \leftarrow \sigma_{kp_6} \\ & dn_{1,1} \leftarrow \frac{d}{d\sigma_1} \left[\frac{d}{d\sigma_1} \left[3 \cdot (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) + \sqrt{\frac{1}{2} \cdot \left[\left(\sigma_1 - \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3} \right)^2 + \left(\sigma_2 - \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3} \right)^2 + \left(\sigma_3 - \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3} \right)^2 + 2 \cdot [(\sigma_4)^2 + (\sigma_5)^2 + (\sigma_6)^2] \right]} \right] \right] \\ & dn_{1,2} \leftarrow \frac{d}{d\sigma_2} \left[\frac{d}{d\sigma_1} \left[3 \cdot (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) + \sqrt{\frac{1}{2} \cdot \left[\left(\sigma_1 - \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3} \right)^2 + \left(\sigma_2 - \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3} \right)^2 + \left(\sigma_3 - \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3} \right)^2 + 2 \cdot [(\sigma_4)^2 + (\sigma_5)^2 + (\sigma_6)^2] \right]} \right] \right] \\ & dn_{1,3} \leftarrow \frac{d}{d\sigma_3} \left[\frac{d}{d\sigma_1} \left[3 \cdot (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) + \sqrt{\frac{1}{2} \cdot \left[\left(\sigma_1 - \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3} \right)^2 + \left(\sigma_2 - \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3} \right)^2 + \left(\sigma_3 - \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3} \right)^2 + 2 \cdot [(\sigma_4)^2 + (\sigma_5)^2 + (\sigma_6)^2] \right]} \right] \right] \\ & dn_{1,4} \leftarrow \frac{d}{d\sigma_4} \left[\frac{d}{d\sigma_1} \left[3 \cdot (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) + \sqrt{\frac{1}{2} \cdot \left[\left(\sigma_1 - \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3} \right)^2 + \left(\sigma_2 - \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3} \right)^2 + \left(\sigma_3 - \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3} \right)^2 + 2 \cdot [(\sigma_4)^2 + (\sigma_5)^2 + (\sigma_6)^2] \right]} \right] \right] \\ & dn_{1,5} \leftarrow \frac{d}{d\sigma_5} \left[\frac{d}{d\sigma_1} \left[3 \cdot (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) + \sqrt{\frac{1}{2} \cdot \left[\left(\sigma_1 - \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3} \right)^2 + \left(\sigma_2 - \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3} \right)^2 + \left(\sigma_3 - \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3} \right)^2 + 2 \cdot [(\sigma_4)^2 + (\sigma_5)^2 + (\sigma_6)^2] \right]} \right] \right] \\ & dn_{1,6} \leftarrow \frac{d}{d\sigma_6} \left[\frac{d}{d\sigma_1} \left[3 \cdot (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) + \sqrt{\frac{1}{2} \cdot \left[\left(\sigma_1 - \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3} \right)^2 + \left(\sigma_2 - \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3} \right)^2 + \left(\sigma_3 - \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3} \right)^2 + 2 \cdot [(\sigma_4)^2 + (\sigma_5)^2 + (\sigma_6)^2] \right]} \right] \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left. \begin{aligned} \text{dn}_{6,4} &\leftarrow \frac{d}{d\sigma_4} \left[\frac{d}{d\sigma_6} \left[\beta(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) + \sqrt{\frac{1}{2} \left[\left(\sigma_1 - \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3} \right)^2 + \left(\sigma_2 - \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3} \right)^2 + \left(\sigma_3 - \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3} \right)^2 + 2[(\sigma_4)^2 + (\sigma_5)^2 + (\sigma_6)^2]} \right]} \right] \right] \\ \text{dn}_{6,5} &\leftarrow \frac{d}{d\sigma_5} \left[\frac{d}{d\sigma_6} \left[\beta(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) + \sqrt{\frac{1}{2} \left[\left(\sigma_1 - \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3} \right)^2 + \left(\sigma_2 - \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3} \right)^2 + \left(\sigma_3 - \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3} \right)^2 + 2[(\sigma_4)^2 + (\sigma_5)^2 + (\sigma_6)^2]} \right]} \right] \right] \\ \text{dn}_{6,6} &\leftarrow \frac{d}{d\sigma_6} \left[\frac{d}{d\sigma_6} \left[\beta(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) + \sqrt{\frac{1}{2} \left[\left(\sigma_1 - \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3} \right)^2 + \left(\sigma_2 - \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3} \right)^2 + \left(\sigma_3 - \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3} \right)^2 + 2[(\sigma_4)^2 + (\sigma_5)^2 + (\sigma_6)^2]} \right]} \right] \right] \end{aligned} \right|_{\text{dn}} \end{aligned}$$

Обчислення

$$\begin{aligned} Dr &= \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{r}_\sigma}{\partial \boldsymbol{\sigma}} & \frac{\partial \mathbf{r}_\sigma}{\partial \lambda} \\ \frac{\partial r_f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} & \frac{\partial r_f}{\partial \lambda} \end{bmatrix} \quad \frac{\partial \mathbf{r}_\sigma}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{I} + \Delta \lambda \mathbf{D}^e \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \quad \frac{\partial \mathbf{r}_\sigma}{\partial \lambda} = \mathbf{D}^e \mathbf{n} \\ \frac{\partial r_f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} &= \mathbf{n}^T \quad \frac{\partial r_f}{\partial \lambda} = -h \end{aligned}$$

```
Dr(σkp, Δλ, β) :=
  for i ∈ 1..7
    for j ∈ 1..7
      Dri,j ← 0
  K ← Δλ · D(E, ν) · dn_dσ(σkp, β)
  for i ∈ 1..6
    for j ∈ 1..6
      Dri,j ← Dri,j + Ki,j
  for i ∈ 1..6
    Dri,i ← Dri,i + 1
  n ← n_(σkp, β)
  dσ_dλ ← D(E, ν) · n
  for i ∈ 1..6
    Dri,7 ← Dri,7 + dσ_dλi
  for i ∈ 1..6
    Dr7,i ← Dr7,i + ni
  Dr7,7 ← Dr7,7 - H_
  Dr
```

+

$$\sigma_{eq} = 3\beta\sigma_m + \sqrt{\frac{1}{2} \mathbf{S} : \mathbf{S}},$$

Обчислення еквівалентного напруження σ_{eq_DP} за Друкером-Прагером у скінченному елементі

$$\sigma_{eq_DP}(\sigma, \beta) := \begin{cases} \mathbf{S} \leftarrow \mathbf{S}_-(\sigma) \\ \sigma_{DP} \leftarrow \beta(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) + \sqrt{\frac{1}{2} \left[(\mathbf{S}_1)^2 + (\mathbf{S}_2)^2 + (\mathbf{S}_3)^2 + 2 \left[(\mathbf{S}_4)^2 + (\mathbf{S}_5)^2 + (\mathbf{S}_6)^2 \right] \right]} \\ \sigma_{DP} \end{cases}$$

Обчислення неувязки r_σ у скінченному елементі

$$\mathbf{r}_\sigma = \boldsymbol{\sigma}_{k+1} - \boldsymbol{\sigma}^{e(tr)} + \Delta\lambda \mathbf{D}^e \mathbf{n}(\boldsymbol{\sigma}_{k+1}, \lambda_{k+1})$$

$$r_\sigma(\sigma_{kp}, \sigma_{tr}, \sigma_y, \Delta\lambda, \beta) := \left| \begin{array}{l} \text{for } i \in 1..6 \\ \quad \left| \begin{array}{l} \sigma_i \leftarrow \sigma_{kp_i} \\ \sigma_{e_i} \leftarrow \sigma_{tr_i} \end{array} \right. \\ \quad K \leftarrow \Delta\lambda \cdot D(E, \nu) \cdot n_-(\sigma_{kp}, \beta) \\ \quad r_\sigma \leftarrow \sigma - \sigma_e + K \\ \quad r_\sigma \end{array} \right.$$

Обчислення неувязки r_f у скінченному елементі

$$r_f = 3\beta\sigma_m + \sqrt{\frac{1}{2}\mathbf{S}:\mathbf{S}} - \sigma_y$$

$$r_f(\sigma_{kp}, \sigma_y, \beta) := \left| \begin{array}{l} \sigma_{eq} \leftarrow \sigma_{eq_DP}(\sigma_{kp}, \beta) \\ rf \leftarrow \sigma_{eq} - \sigma_y \\ rf \end{array} \right.$$

Обчислення вектора прирощення пластичних деформацій ε_{pl} у скінченному елементі з номером k

$$\varepsilon_{pl}(\Delta\lambda, \sigma_{kp}, \beta) := \left| \begin{array}{l} \mathbf{n} \leftarrow \mathbf{n}_-(\sigma_{kp}, \beta) \\ \varepsilon_{pl} \leftarrow \Delta\lambda \cdot \mathbf{n} \\ \varepsilon_{pl} \end{array} \right.$$

Розрахунки за алгоритмом RMA

$N\beta := 1$

```

 $\sigma_2 :=$  for  $k \in 1..nEl$ 
     $\varepsilon Pl_{eq_k} \leftarrow 0$ 
     $\Delta\lambda\lambda_k \leftarrow 0$ 
     $\sigma y_k \leftarrow \sigma T_{DP}$ 
    for  $i \in 1..6$ 
         $\sigma kp_{k,i} \leftarrow 0$ 
         $\sigma 0_{k,i} \leftarrow 0$ 
         $\sigma 0_{prev_{k,i}} \leftarrow 0$ 
     $\delta \leftarrow 1$ 
     $U \leftarrow U_-(\delta, \sigma 0)$ 
    for  $Iter2 \in 1..N\beta$ 
         $\varepsilon e \leftarrow \varepsilon_-(U)$ 
         $\sigma_{tr} \leftarrow \sigma_-(\varepsilon e)$ 
         $\sigma kp \leftarrow \sigma_{tr}$ 
         $\sigma E_{DP} \leftarrow \sigma EqDP(\sigma_{tr}, \beta)$ 
        for  $k \in 1..nEl$ 
             $El_{pl_k} \leftarrow 0$ 
             $El_{pl_k} \leftarrow 1$  if  $\sigma E_{DP_k} \geq \sigma y_k$ 
        for  $k \in 1..nEl$ 
             $\Delta\lambda \leftarrow 0$ 
             $\sigma y_- \leftarrow \sigma y_k$ 
            if  $El_{pl_k} = 1$ 
                 $\sigma\lambda k_7 \leftarrow 0$ 
                for  $i \in 1..6$ 
                     $\sigma\lambda k_i \leftarrow \sigma kp_{k,i}$ 
                     $\sigma tr_i \leftarrow \sigma_{tr_{k,i}}$ 

```

```

for j ∈ 1..6
    DR ← Dr(σλk, Δλ, β)
    R_of ← r_of(σλk, σtr, σy_, Δλ, β)
    σ_er ← lsolve(DR, R_of)
    σλk ← σλk - σ_er
    Δλ ← σλk_7
    σ_0 ← σ_pl(Δλ, σλk, β)
for i ∈ 1..6
    σkp_{k,i} ← σλk_i
    σR_i ← σλk_i
    σ0_{k,i} ← σ_0_i
    εPleq ← ε_pl_eq(ε_pl(Δλ, σR, β))
    ασ ← 0
    σE_DP_k ← σ_eq_DP(σR, β)
    εPl_eq_k ← εPleq
    Δλλ_k ← σλk_7
    aa2 ← 2
aa3 ← 3
δ ← 0
ΔU ← U_(δ, σ0 - σ0_prev)
U ← U + ΔU
Δσ0 ← σ0 - σ0_prev
σ0_prev ← σ0
StopIter ← 0
σE_DP ← σEqDP(σkp, β)
σE_M ← σ_eq_M(σkp)
for i ∈ 1..3Nnod_gl
    σ_{i,7} ← U_i
    σ_{i,8} ← ΔU_i
for k ∈ 1..nEl
    σ_{k,9} ← σE_DP_k

```

```

     $\sigma_{i,8} \leftarrow \Delta U_i$ 
  for  $k \in 1..nEl$ 
     $\sigma_{k,9} \leftarrow \sigma E\_DP_k$ 
     $\sigma_{k,10} \leftarrow \sigma E\_M_k$ 
     $\sigma_{k,11} \leftarrow \varepsilon Pl\_eq_k$ 
     $\sigma_{k,12} \leftarrow El\_pl_k$ 
     $\sigma_{k,13} \leftarrow \sigma y_k$ 
     $\sigma_{k,28} \leftarrow El\_pl_k$ 
     $\sigma_{k,15} \leftarrow \Delta \lambda \lambda_k$ 
    for  $i \in 1..6$ 
       $\sigma_{k,i} \leftarrow \sigma kp_{k,i}$ 
    for  $i \in 1..6$ 
       $\sigma_{k,15+i} \leftarrow \sigma\_tr_{k,i}$ 
    for  $i \in 1..6$ 
       $\sigma_{k,21+i} \leftarrow \Delta \sigma^0_{k,i}$ 
 $\sigma_{2,14} \leftarrow \sigma T\_DP$ 
Stop  $\leftarrow 0$ 
 $\sigma$ 

```

Обчислення еквівалентного напруження по СЕ

$$\sigma_{eq} = \beta \sigma_{kk} + \sqrt{\frac{1}{2} S_{ij} S_{ij}}$$

```

 $\sigma Eq\_DP :=$  for  $k \in 1..nEl$ 
   $p \leftarrow \frac{\sigma_{k,1} + \sigma_{k,2} + \sigma_{k,3}}{3}$ 
   $S1 \leftarrow \sigma_{k,1} - p$ 
   $S2 \leftarrow \sigma_{k,2} - p$ 
   $S3 \leftarrow \sigma_{k,3} - p$ 
   $S4 \leftarrow \sigma_{k,4}$ 
   $S5 \leftarrow \sigma_{k,5}$ 
   $S6 \leftarrow \sigma_{k,6}$ 
   $\sigma Eq\_DP_k \leftarrow \sqrt{\frac{1}{2} [S1^2 + S2^2 + S3^2 + 2 \cdot (S4^2 + S5^2 + S6^2)]} + \beta (\sigma_{k,1} + \sigma_{k,2} + \sigma_{k,3})$ 
 $\sigma Eq\_DP$ 

```

Додаток Б. Покрокові алгоритми розв'язання задач пружно-пластичності

Б.1. Покроковий алгоритм – предиктор-коректор

Класичний покроковий алгоритм [3], що базується на пружно-пластичній залежності між напруженнями і деформаціями, в якому передбачається виконання умови про знаходження проміжних розв'язків задачі в околі поверхні плинності.

Розглянемо основні співвідношення МСЕ, що стосуються цього алгоритму, які записано з використанням одноіндексної форми тензорів, характерної для МСЕ [19]:

$$\mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{F}; \quad (\text{Б.1})$$

$$\mathbf{K}\dot{\mathbf{u}} = \beta \dot{\mathbf{F}}; \quad (\text{Б.2})$$

$$\mathbf{K}\dot{\mathbf{u}} = \mathbf{f}_{\sigma^0}; \quad (\text{Б.3})$$

$$\{\epsilon^{el}\} = [B]\{u\}; \quad (\text{Б.4})$$

$$\{\sigma^{el}\} = [D^{el}]\{\epsilon^{el}\}; \quad (\text{Б.5})$$

$$\sigma_{eq} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 + 6(\sigma_4^2 + \sigma_5^2 + \sigma_6^2)}; \quad (\text{Б.6})$$

$$\{\dot{\epsilon}^{el}\} = [B]\{\dot{u}\}; \quad (\text{Б.7})$$

$$\{\dot{\sigma}^{el}\} = [D^{el}]\{\dot{\epsilon}^{el}\}; \quad (\text{Б.8})$$

$$\{\dot{\sigma}^{ep}\} = [D^{ep}]\{\dot{\epsilon}^{el}\}; \quad (\text{Б.9})$$

$$\{\dot{\epsilon}^{pl}\} = \gamma \left\{ \frac{\partial F}{\partial \{\sigma\}} \right\} \left\{ \frac{\partial F}{\partial \{\sigma\}} \right\}^T [D^{el}]\{\dot{\epsilon}^{el}\}; \quad (\text{Б.10})$$

$$\epsilon_{eq} = \sqrt{\frac{2}{3} e_{ij} e_{ij}}, \quad e_{ij} = \epsilon_{ij} - \frac{1}{3} \epsilon_{kk} \delta_{ij}; \quad (\text{Б.11})$$

$$\sigma_y = \sigma_{0y} + h \epsilon_{eq}^{pl}, \quad (\text{Б.12})$$

де $\mathbf{K} = \sum_{e=1}^E [k^{(e)}]$ – матриця СЛАР МСЕ; (e) – індекс СЕ; E – кількість СЕ, на які дискретизована розрахункова область Ω ; $[k^{(e)}]$ – матриця жорсткості СЕ; $\mathbf{F} = \sum_{e=1}^E \{f^{(e)}\}$ – вектор вільних членів СЛАР; β – коефіцієнт прирощення наван-

таження; $\mathbf{f}_{\sigma^0} = \sum_{e=1}^E \int_{V^{(e)}} [B^{(e)}]^T \{\dot{\sigma}^{pl}\} dV$ – вектор вільних членів СЛАР, пов’язаний з

початковими напруженнями в СЕ; $V^{(e)}$ – об’єм СЕ; $[B^{(e)}] = [B]$ – матриця градієнтів СЕ; $\{\dot{\sigma}^{pl}\}$ – тензор прирощення пластичних деформацій СЕ; $\{\epsilon^{el}\}$ – тензор пружних деформацій СЕ; $\{u\}$ – вектор вузлових переміщень СЕ; $\{\sigma^{el}\}$ – тензор пружних напружень СЕ; $[D^{el}]$ – матриця пружних констант СЕ (в загальному випадку це тензор четвертого рангу); σ_{eq} – еквівалентне напруження за Мізесом СЕ; $\{\dot{\sigma}^{ep}\}$ – тензор прирощення істинних напружень у пружно-пластичних СЕ; $[D^{ep}] = [D^{el}] - \gamma [D^{el}] \left\{ \frac{\partial F}{\partial \{\sigma\}} \right\} \left\{ \frac{\partial F}{\partial \{\sigma\}} \right\}^T [D^{el}]$ – матриця пружно-

пластичних властивостей СЕ; $\gamma = \left[h + \left\{ \frac{\partial F}{\partial \{\sigma\}} \right\}^T [D^{el}] \left\{ \frac{\partial F}{\partial \{\sigma\}} \right\} \right]^{-1}$;

$\left\{ \frac{\partial F}{\partial \{\sigma\}} \right\} = \left\{ \frac{\partial f}{\partial \{\sigma\}} \right\} = \frac{3}{2} \frac{\{S\}}{\sigma_{eq}}$ – похідна за тензором напруження від функції повер-

хні плинності або градієнт функції пластичності, який є перпендикуляром до поверхні пластичності в точці з тензором напруження σ ; $\{S\}$ – тензор девіаторних напружень СЕ; $\{\epsilon^{el}\}$ – тензор прирощення пружних деформацій СЕ.

Послідовність дій за покроковим алгоритмом предиктор-коректор.

1. Розв’язується лінійна пружна задача за умови повного силового навантаження (Б.1) [3, 19] і знаходяться вектори переміщення у вузлах СЕ $\{u\}$ за нульових початкових напружень $\{\dot{\sigma}^{pl}\} = 0$. Далі визначаються тензори пружних деформацій $\{\epsilon^{el}\}$ і напружень $\{\sigma^{el}\}$ у СЕ за формулами (Б.4), (Б.5), відповідно. Визначаються еквівалентні напруження за Мізесом σ_{eq} (Б.6) і обчислюється масштабний множник $\lambda_0 = \sigma_y / \sigma_{eq, \max}$ (де $\sigma_{eq, \max}$ – максимальне значення, $\sigma_y = \sigma_{y0}$ – початкове значення границі плинності за умови, що $\epsilon_{eq}^{pl} = 0$). Виконується масштабування векторів переміщення $\{u\} \lambda_0$, тензорів пружних деформацій $\{\epsilon^{el}\} \lambda_0$ і напружень $\{\sigma^{el}\} \lambda_0$ по всіх СЕ, щоб початковий розв’язок задачі відповідав поверхні плинності. Запам’ятовуються поточні переміщення $\{u\} = \{u\} \lambda_0$ і напруження $\{\sigma_1\} = \{\sigma^{el}\} \lambda_0$ у кожному СЕ. Наразі нульове наближення отримано.

2. Задається кількість кроків навантаження N_β та визначається коефіцієнт прирощення навантаження $\beta \ll \lambda_0$ за формулою $\beta = \frac{1 - \lambda_0}{N_\beta}$, тобто $\lambda_0 + \beta N_\beta = 1$. Виконується присвоєння $\varepsilon_{eq}^{pl} = 0$ – еквівалентні пластичні деформації по всіх СЕ.

3. Початок циклу по $k = 1 \dots N_\beta$ з прирощення навантаження або покрокового циклу. Виконується мале прирощення навантаження $\beta \dot{\mathbf{F}}$ і розв'язується СЛАР МСЕ відносно вузлових значень прирощення переміщень вигляду (Б.2) та визначаються вектори прирощення вузлових переміщень $\{\dot{\mathbf{u}}\}^k$. У кожному СЕ знаходяться тензори прирощення пружних деформацій $\{\dot{\varepsilon}^{el}\}^k$ (Б.7) і напружень $\{\dot{\sigma}^{el}\}^k$ (Б.8), поточні пружні напруження $\{\sigma_2\} = \{\sigma_1\} + \{\dot{\sigma}^{el}\}^k$ та за $\{\sigma_2\}$ обчислюються еквівалентні напруження за Мізесом σ_{eq} (Б.6). З використанням нестрогої нерівності $\{\sigma_2\} \geq \sigma_y$ визначається список пластичних СЕ, в яких обчислюються тензори прирощення істинних напружень з використанням пружно-пластичної залежності між напруженнями і деформаціями $\{\dot{\sigma}^{ep}\}^k$ (Б.9), прирощення пластичних напружень $\{\dot{\sigma}^{pl}\}^k = \{\dot{\sigma}^{el}\}^k - \{\dot{\sigma}^{ep}\}^k$ і прирощення пластичної деформації $\{\dot{\varepsilon}^{pl}\}^k$ (Б.10), за значеннями яких визначаються прирощення еквівалентних пластичних напружень $\dot{\sigma}_{eq}^{pl}$ (Б.6) і деформацій $\dot{\varepsilon}_{eq}^{pl}$ (Б.11). Як перше наближення використовуються прирощення початкових пластичних напружень $\{\dot{\sigma}^0\}^k = \{\dot{\sigma}^{pl}\}^k$. Вузлові значення векторів прирощення переміщення накопичуються за формулою $\{\dot{\mathbf{u}}\} = \{\dot{\mathbf{u}}\} + \{\dot{\mathbf{u}}\}^k$. Поточні значення прирощення напруження запам'ятовуються в пластичних СЕ за формулою $\{\sigma_2\} = \{\sigma_1\} + \{\dot{\sigma}^{ep}\}$, а в пружних за – $\{\sigma_2\} = \{\sigma_1\} + \{\dot{\sigma}^{el}\}$ та виконується присвоєння $\{\sigma_1\} = \{\sigma_2\}$. Еквівалентні пластичні деформації накопичуються в пластичних СЕ $\varepsilon_{eq}^{pl} = \varepsilon_{eq}^{pl} + \dot{\varepsilon}_{eq}^{pl}$. За отриманим значеннями ε_{eq}^{pl} уточняється значення границі плинності матеріалу σ_y (Б.12) за пластичними СЕ.

4. Цикл за початковими напруженнями $m = 1, 2, \dots$. За умови, що $\mathbf{F} = 0$, за отриманими в п. 3 прирощеннями початкових напружень $\{\dot{\sigma}^0\}$ із розв'язання СЛАР МСЕ вигляду (Б.3) отримуються вузлові значення векторів прирощення переміщень $\{\dot{\mathbf{u}}\}^m$, тензори прирощення пружних деформацій $\{\dot{\varepsilon}^{el}\}^m$ (Б.7) і напружень $\{\dot{\sigma}^{el}\}^m$ (Б.8), поточні пружні напруження

$\{\sigma_2\} = \{\sigma_1\} + \{\dot{\sigma}^{el}\}^m$ та за $\{\sigma_2\}$ обчислюються еквівалентні напруження за Мізом σ_{eq} (Б.6). На підставі нерівності $\{\sigma_2\} \geq \sigma_y$ визначається список пластичних СЕ, в яких обчислюються тензори прирощення істинних напружень $\{\dot{\sigma}^{ep}\}^m$ (Б.9), прирощення пластичних напружень $\{\dot{\sigma}^{pl}\}^m = \{\dot{\sigma}^{el}\}^m - \{\dot{\sigma}^{ep}\}^m$ і прирощення пластичної деформації $\{\dot{\epsilon}^{pl}\}^k$ (Б.10), за якими визначаються прирощення еквівалентних пластичних напружень $\dot{\sigma}_{eq}^{pl}$ (Б.6) і деформацій $\dot{\epsilon}_{eq}^{pl}$ (Б.11). Отримані тензори $\{\dot{\sigma}^{pl}\}^m$ тепер є новими початковими пластичними напруженнями $\{\dot{\sigma}^0\} = \{\dot{\sigma}^{pl}\}^m$. Поточні значення переміщень напруження запам'ятовуються в пластичних СЕ за формулою $\{\sigma_2\} = \{\sigma_1\} + \{\dot{\sigma}^{ep}\}$. Виконуються присвоєння $\{\dot{u}\} = \{\dot{u}\} + \{\dot{u}\}^m$, $\epsilon_{eq}^{pl} = \epsilon_{eq}^{pl} + \dot{\epsilon}_{eq}^{pl}$, $\{\sigma_1\} = \{\sigma_2\}$. Уточняється значення границі плинності матеріалу σ_y (Б.12) у пластичних СЕ. Виконується перевірка: $\dot{\sigma}_{eq}^{pl} \leq \delta_\sigma$ або $\dot{\epsilon}_{eq}^{pl} \leq \delta_\epsilon$. Якщо перевірка не виконується, то розрахунки повторюються з п. 4, у зворотному випадку відбувається перехід до п. 5.

5. Виконується присвоєння $k = k + 1$. Перевірка, якщо $k \leq N_\beta$, то виконується перехід у п. 3, у зворотному випадку обчислюються повні еквівалентні деформації ϵ_{eq}^{tot} (Б.11) і пружні еквівалентні деформації $\epsilon_{eq}^{el} = \epsilon_{eq}^{tot} - \epsilon_{eq}^{pl}$ по всіх СЕ. На цьому розв'язання задачі завершено.

Б.2. Зворотний покроковий алгоритм з розрахунком пробних напружень

Зворотний покроковий алгоритм [21], який базується на використанні пробних напружень для знаходження еквівалентних пластичних деформацій за зворотним методом Ейлера.

Розглянемо основні формули покрокового алгоритму з розрахунком пробних напружень [19]:

$$\{\epsilon^{tr}\} = [B]\{u^{tr}\}; \quad (Б.13)$$

$$\{\sigma^{tr}\} = [D^{el}]\{\epsilon^{tr}\}; \quad (Б.14)$$

$$\mathbf{S}^{tr} = \boldsymbol{\sigma}^{tr} - \text{tr}(\boldsymbol{\sigma})\mathbf{I}; \quad (Б.15)$$

$$\bar{\sigma}^{tr} = \sigma_{eq}^{tr} = \sqrt{\frac{3}{2} S_{ij}^{tr} S_{ij}^{tr}}, \quad \bar{\sigma}^{tr} = \sqrt{\frac{3}{2} [S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 + 2(S_4^2 + S_5^2 + S_6^2)]}; \quad (Б.16)$$

$$F(\mathbf{S}, \sigma_y(\Delta \bar{e}^{pl})) = \sqrt{\frac{3}{2}} \mathbf{S} : \mathbf{S} - \sigma_y(\Delta \bar{e}^{pl}) = 0; \quad (Б.17)$$

$$\bar{\sigma}^{tr} - 3G\Delta \bar{e}^{pl} = \sigma_y(\Delta \bar{e}^{pl}) \text{ або } \bar{\sigma}^{tr} - 3G\Delta \bar{e}^{pl} = \sigma_{y0} + h\Delta \bar{e}^{pl}; \quad (Б.18)$$

$$\Delta \bar{e}^{pl} = \frac{\bar{\sigma}^{tr} - \sigma_y}{3G - h}; \quad (Б.19)$$

$$\sigma_y(\Delta \bar{e}^{pl}) = \sigma_{y0} + h\Delta \bar{e}^{pl}; \quad (Б.20)$$

$$\mathbf{S} = \frac{\mathbf{S}^{tr}}{1 + \frac{3G}{\sigma_y(\Delta \bar{e}^{pl})} \Delta \bar{e}^{pl}}; \quad (Б.21)$$

$$\mathbf{n} = \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \frac{3}{2} \frac{\mathbf{S}}{\sigma_y}; \quad (Б.22)$$

$$\Delta \boldsymbol{\sigma}^{pl} = \Delta \boldsymbol{\sigma}^0 = -2G(\Delta \mathbf{e}^{pl} - \Delta \mathbf{e}^{pl}|_{old}), \quad (Б.23)$$

де $\{\epsilon^{tr}\}$ – тензор пробних пружних деформацій СЕ; $\{u^{tr}\}$ – вектор пробних вузлових переміщень СЕ; $\{\sigma^{tr}\}$ – тензор пробних пружних напружень СЕ; \mathbf{S}^{tr} – тензор пробних дівіаторних напружень СЕ; $\bar{\sigma}^{tr} = \sigma_{eq}^{tr}$ – еквівалентні напруження за Мізесом; $\Delta \bar{e}^{pl}$ – приращення еквівалентних пластичних деформацій; \mathbf{S} – тензор дівіаторних пружних деформацій; \mathbf{n} – градієнт функції пластичності; $\Delta \boldsymbol{\sigma}^{pl}$ – тензор приращення пластичних напружень; $\Delta \mathbf{e}^{pl}$ – тензор приращення пластичних деформацій.

Для отримання (Б.18) з (Б.17) використовуються такі перетворення:

- інтегрування рівняння закону пластичної течії в диференціальній формі $d\mathbf{e}^{pl} = d\bar{\epsilon}^{pl} \mathbf{n}$ з використанням зворотного методу Ейлера дає рівняння у вигляді прирощень тензора пластичних девіаторних деформацій, тобто закон пластичної течії

$$\Delta \mathbf{e}^{pl} = \Delta \bar{\epsilon}^{pl} \mathbf{n}; \quad (\text{Б.24})$$

- комбінуючи рівняння тензора девіаторний напружень з рівнянням для швидкості деформацій $d\boldsymbol{\epsilon} = d\boldsymbol{\epsilon}^{el} + d\boldsymbol{\epsilon}^{pl}$, отримуємо

$$\mathbf{S} = 2G \left(\mathbf{e}^{el} \Big|_t + \Delta \mathbf{e} - \Delta \bar{\epsilon}^{pl} \mathbf{n} \right), \quad (\text{Б.25})$$

де t – поточний час;

- перетворення (Б.25) з використанням градієнта функції пластичності

$$\mathbf{n} = \frac{3 \mathbf{S}}{2 q} \text{ разом з умовою Мізеса (Б.17) дає}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{S} &= 2G \left(\mathbf{e}^{el} \Big|_t + \Delta \mathbf{e} - \Delta \bar{\epsilon}^{pl} \mathbf{n} \right) \rightarrow \mathbf{S} + 2G \Delta \bar{\epsilon}^{pl} \mathbf{n} = 2G \left(\mathbf{e}^{el} \Big|_t + \Delta \mathbf{e} \right) \rightarrow \\ &\rightarrow \mathbf{S} + 2G \frac{3 \mathbf{S}}{2 q} \Delta \bar{\epsilon}^{pl} = 2G \hat{\mathbf{e}} \rightarrow \mathbf{S} + \mathbf{S} \frac{3G}{q} \Delta \bar{\epsilon}^{pl} = 2G \hat{\mathbf{e}} \rightarrow \left(1 + \frac{3G}{q} \Delta \bar{\epsilon}^{pl} \right) \mathbf{S} = 2G \hat{\mathbf{e}}, \end{aligned} \quad (\text{Б.26})$$

де $\hat{\mathbf{e}} = \mathbf{e}^{el} \Big|_t + \Delta \mathbf{e}$ – тензор повних деформацій; $q = \bar{\sigma}(\bar{\epsilon}^{pl})$ – границя плинності;

- скалярний добуток рівняння (Б.26) самого на себе дає

$$\begin{aligned} (q + 3G \Delta \bar{\epsilon}^{pl})^2 (\mathbf{S} : \mathbf{S}) &= (q + 3G \Delta \bar{\epsilon}^{pl})^2 (\hat{\mathbf{e}} : \hat{\mathbf{e}}) \rightarrow (q + 3G \Delta \bar{\epsilon}^{pl})^2 (\mathbf{S} : \mathbf{S}) = \frac{3}{2} (\mathbf{S} : \mathbf{S}) 4G^2 \hat{\mathbf{e}} : \hat{\mathbf{e}} \rightarrow \\ &\rightarrow (q + 3G \Delta \bar{\epsilon}^{pl})^2 = 3G^2 (2 \hat{\mathbf{e}} : \hat{\mathbf{e}}) \rightarrow q + 3G \Delta \bar{\epsilon}^{pl} = \sqrt{3G (2 \hat{\mathbf{e}} : \hat{\mathbf{e}})} \rightarrow \\ q + 3G \Delta \bar{\epsilon}^{pl} &= 3G \left(\sqrt{\frac{2}{3} \hat{\mathbf{e}} : \hat{\mathbf{e}}} \right) \rightarrow q + 3G \Delta \bar{\epsilon}^{pl} = 3G \tilde{\epsilon} \rightarrow 3G \tilde{\epsilon} - 3G \Delta \bar{\epsilon}^{pl} = q, \end{aligned} \quad (\text{Б.27})$$

де $q^2 = \frac{3}{2} (\mathbf{S} : \mathbf{S})$; $\tilde{\epsilon} = \sqrt{\frac{2}{3} \hat{\mathbf{e}} : \hat{\mathbf{e}}}$ – повна еквівалентна девіаторна деформація;

- виконуючи в (Б.27) заміни $\bar{\sigma}^{tr} = 3G \tilde{\epsilon}$ і $q = \sigma_y(\Delta \bar{\epsilon}^{pl})$, остаточно отримується вираз для прирощення еквівалентної пластичної деформації $\Delta \bar{\epsilon}^{pl}$ (Б.19)

$$\bar{\sigma}^{tr} - 3G \Delta \bar{\epsilon}^{pl} = \sigma_y(\Delta \bar{\epsilon}^{pl}); \quad (\text{Б.28})$$

- з використанням у (Б.26) заміни $\mathbf{S}^{tr} = 2G\hat{\mathbf{e}}$ і $q = \sigma_y(\Delta\bar{\mathbf{e}}^{pl})$ отримується формула для визначення дівіаторних пружних деформацій (Б.21)

$$\left(1 + \frac{3G}{\sigma_y(\Delta\bar{\mathbf{e}}^{pl})} \Delta\bar{\mathbf{e}}^{pl}\right) \mathbf{S} = \mathbf{S}^{tr}, \quad (\text{Б.29})$$

Послідовність дій за зворотним покроковим алгоритмом.

1. Розв'язується лінійна пружна задача за повного навантаження (Б.1). Отримується вектор пробних переміщень у вузлах $\{\mathbf{u}^{tr}\}$. Виконується присвоєння: $k=1$ – номер ітерації, $\Delta\mathbf{e}^{pl}|_{old} = 0$ – початкові пластичні деформації.

2. Визначаються тензори пробних деформацій $\{\boldsymbol{\varepsilon}^{tr}\}$ (Б.13), пробних напружень $\{\boldsymbol{\sigma}^{tr}\}$ (Б.14), пробних дівіаторних напружень (Б.15), а також пробні еквівалентні напруження за Мізесом $\bar{\boldsymbol{\sigma}}^{tr} = \boldsymbol{\sigma}_{eq}^{tr}$ (Б.16) по всіх СЕ.

3. Визначається список пластичних скінченних елементів з використанням умови $\sigma_{eq}^{pr} \geq \sigma_y(\Delta\bar{\mathbf{e}}^{pl})$ (для $k=1$, $\sigma_y = \sigma_{0y}$). Далі в пластичних СЕ визначаються приращення еквівалентних пластичних деформацій за формулою $\Delta\bar{\mathbf{e}}^{pl}$ (Б.19) (у разі нелінійної залежності $\sigma_y(\Delta\bar{\mathbf{e}}^{pl})$ для визначення $\Delta\bar{\mathbf{e}}^{pl}$ використовується метод Ньютона [6]), уточняється значення границі плинності матеріалу в пластичних СЕ $\sigma_y(\Delta\bar{\mathbf{e}}^{pl})$ (Б.20), тензор дівіаторних пружних деформацій \mathbf{S} за формулою (Б.21) та еквівалентні напруження за Мізесом $\bar{\boldsymbol{\sigma}}^{tr}$ (Б.16), визначаються градієнт функції пластичності \mathbf{n} (Б.22), тензор приращення пластичних деформацій $\Delta\mathbf{e}^{pl}$ (Б.24) та знаходяться еквівалентні пластичні деформації $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^{pl} = \boldsymbol{\varepsilon}_{eq}^{pl} = \Delta\bar{\mathbf{e}}^{pl}$, $\Delta\bar{\mathbf{e}}^{pl} = \sqrt{\frac{2}{3} \Delta\mathbf{e}^{pl} : \Delta\mathbf{e}^{pl}}$.

4. Визначається тензор початкових пластичних напружень за формулою (Б.23). Розв'язується пружна задача за умови $\mathbf{F} = 0$ і навантаженням початковими напруженнями (Б.3) та визначається вектор переміщення $\mathbf{u}^{k+1} = \mathbf{u}^k + \Delta\mathbf{u}^k$. Виконується перевірка $|\Delta\mathbf{u}| \leq \delta_u$ або $|\Delta\boldsymbol{\sigma}^0| \leq \delta_{\Delta\sigma^0}$. Якщо нерівності виконуються, то ітерації закінчено і відбувається перехід у п. 5. У зворотному випадку виконується присвоєння $k = k + 1$ і здійснюється перехід у п. 2 та розв'язання задачі повторюється.

5. По всіх СЕ обчислюються $\{\boldsymbol{\varepsilon}^{tot}\}$, $\{\boldsymbol{\sigma}_{eq}\}$, $\{\boldsymbol{\varepsilon}_{eq}^{el}\} = \{\boldsymbol{\varepsilon}_{eq}^{tot}\} - \{\boldsymbol{\varepsilon}_{eq}^{pl}\}$, де $\{\boldsymbol{\varepsilon}_{eq}^{tot}\}$ визначається за формулою (Б.11).

СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНИХ ДЖЕРЕЛ ІНФОРМАЦІЇ

1. Карвацький А. Я., Педченко А. Ю. Розв'язання нелінійних нестационарних задач теплопровідності з використанням САД-систем // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні науки. 2016. № 13. С. 67–77. <http://mcm-math.kpnu.edu.ua/article/view/70206/65449>
2. Карвацький А. Я. Моделювання енергозберігаючих регламентів промислового обладнання : навч. посіб. Київ : НТУУ «КПІ», 2014. 234 с.
3. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике / О. Зенкевич ; пер. с англ. ; под ред. Б. Е. Победри. Москва : Мир, 1975. 541 с.
4. Сегерлинд Л. Применение метода конечных элементов / Л. Сегерлинд ; пер. с англ. А. А. Шестакова ; под ред. Б. Е. Победри. Москва : Мир, 1979. 392 с.
5. Карвацький А. Я. Метод скінченних елементів у задачах механіки суцільних середовищ. Лабораторний практикум з навчальної дисципліни [Електронний ресурс]: навч. посіб. для студ. спеціальностей 131 «Прикладна механіка», 133 «Галузеве машинобудування», спеціалізації «Інжиніринг, комп'ютерне моделювання та проектування обладнання пакування», «Інжиніринг, комп'ютерне моделювання та проектування обладнання виробництв полімерних і будівельних матеріалів і виробів». Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2018. 391 с. Гриф надано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського (протокол № 10 від 21.06.2018 р.) <http://ela.kpi.ua/handle/123456789/23916>
6. Самарский А. А., Попов Ю. П. Разностные методы решения задач газовой динамики. Москва : Наука, 1980. 352 с.
7. Джордж А., Лю Дж. Численное решение больших разреженных систем уравнений; пер. с англ. Х. Д. Икрамова. Москва : Мир, 1984. 334 с.
8. Тьюарсон Р. Разреженные матрицы; пер. с англ. Москва: Мир, 1977. 190 с.
9. Gmsh. A three-dimensional finite element mesh generator with built-in pre- and post-processing facilities: [сайт]. URL: <http://geuz.org/gmsh/> (дата звернення: 29.05.2018).
10. Калиткин Н. Н. Численные методы : учеб. пособие. Москва : Наука. Физматгиз, 1978. 512 с.
11. Исаченко В. П., Осипова В. А., Сукомел А. С. Теплопередача : учебник для вузов. Москва : Энергоиздат, 1981. 416 с.
12. PTC Mathcad: [сайт]. URL: <https://www.ptc.com/en/products/mathcad> (дата звернення: 29.05.2018).
13. Thompson M., Thompson J. ANSYS Mechanical APDL for Finite Element Analysis: 1st ed. Oxford: Butterworth-Heinemann, 2017. 462 p.
14. ParaView: [сайт]. URL: <https://www.paraview.org/> (дата звернення: 29.05.2018).
15. Карвацький А. Я., Педченко А. Ю. Розв'язання нелінійної нестационарної задачі теплопровідності з використанням САД-систем // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні науки. 2016. № 13. С. 67–77. <http://mcm-math.kpnu.edu.ua/article/view/70206/65449>

нарної задачі тепло-електропровідності методом скінченних елементів // Вісник ПДТУ. Серія: Технічні науки. 2016. Вип. 32. С. 205–214.
<http://eir.pstu.edu/handle/123456789/10012>

16. Simo J. C., Taylor R. L. Consistent tangent operators for rate-independent elastoplasticity // *Comp. methods in applied mechanics and engineering*. 1985. Vol. 48. P. 101–118.

17. R. de Borst, M. A. Crisfield, J. J.C. Remmers, C. V. Verhoosel. *Non-linear finite element analysis of solids and structures*: 2nd ed. 2012. John Wiley & Sons Ltd. 516 p. DOI: 10.1002/9781118375938

18. Zienkiewicz O.C. Taylor R.L., Fox D.D. *The Finite Element Method for Solid and Structural Mechanics*. 7th ed. 2014. Publ. by Elsevier Ltd. 624 p.

19. Застосування CAD-систем для розв'язання пружно-пластичних задач з врахуванням ізотропного зміцнення / А. Я. Карвацький, Т. В. Лазарев, С. В. Лелека, А. Ю. Педченко // Вісник НТУ «ХПІ», Серія: Нові рішення в сучасних технологіях. 2017. № 7 (1229). С. 55–63. DOI: 10.20998/2413-4295.2017.07.08
http://repository.kpi.kharkov.ua/bitstream/KhPI-Press/29450/1/vestnik_KhPI_2017_7_Karvatskyi_Zastosuvann_CAD-system.pdf

20. Алгоритм зворотного відображення в розв'язанні задачах пружно-пластичності / А.Я. Карвацький, Т.В. Лазарев, С.В. Лелека, А.Ю. Педченко // Проблеми техніки і технології переробних виробництв: зб. доп. III міжнар. наук.-практ. конф. 30-31 трав. 2017 р. / М-во освіти і науки України, Держ. вищ. навч. закл. «Донец. нац. технічн. ун-т.». Покровськ, ДВНЗ «ДонНТУ», 2017. С. 41–46.

21. Khennane A. *Introduction to Finite Element Analysis Using MATLAB and Abaqus*. Taylor & Francis Group, 2013. 453 p.

22. Modification of implicit algorithm for solving a problem on the elastic plasticity of bulk materials / A. Ya. Karvatskii, E. M. Panov, A. Yu. Pedchenko, V. I. Shkil // *EasternEuropean Journal of Enterprise Technologies*. 2017. Vol. 5, No 7(89). P. 17–23. DOI: 10.15587/1729-4061.2017.109550
<http://journals.uran.ua/eejet/article/view/109550/107400>

ЗМІСТ

ВСТУП	3
ОСНОВНІ ПОЗНАЧЕННЯ ТА СКОРОЧЕННЯ	5
1. НЕЛІНІЙНА НЕСТАЦІОНАРНА ТЕПЛОПРОВІДНІСТЬ ІЗОТРОПНОГО СЕРЕДОВИЩА З ВНУТРІШНІМИ ДЖЕРЕЛАМИ ТЕПЛОТИ	9
1.1. Математична постановка задачі	9
1.2. Методика числового розв'язання задачі	10
1.3. Програмна реалізація числової методики та верифікація	13
1.3.1. Побудова геометричної моделі розрахункової області та її дискретизація	13
1.3.2. Програмний код, його налаштування та тестування	15
Запитання для самоконтролю	19
2. НЕЛІНІЙНА НЕСТАЦІОНАРНА ЗАДАЧА ТЕПЛО-ЕЛЕКТРОПРОВІДНОСТІ	20
2.1. Математична постановка задачі	20
2.2. Методика числового розв'язання задачі	21
2.3. Програмна реалізація числової методики та верифікація	26
Запитання для самоконтролю	30
3. ЗАДАЧА ПРУЖНО-ПЛАСТИЧНОЇ ПОВЕДІНКИ ІЗОТРОПНОГО МАТЕРІАЛУ	32
3.1. Математична постановка задачі	32
3.2. Методика числового розв'язання задачі, побудована на неявному алгоритмі зворотного відображення	33
3.3. Програмна реалізація числової методики та верифікація	37
Запитання для самоконтролю	42
4. ЗАДАЧА ПРУЖНО-ПЛАСТИЧНОЇ ПОВЕДІНКИ СИПКОГО МАТЕРІАЛУ	44
4.1. Математична постановка задачі	44
4.2. Методика числового розв'язання задачі	45
4.3. Програмна реалізація числової методики та верифікація	49
Запитання для самоконтролю	53
Додаток А. Приклади програмних кодів Mathcad для розв'язання нелінійних задач МСС	55
А.1. Нелінійна нестационарна задача теплопровідності	55
А.2. Нелінійна нестационарна задача тепло-електропровідності	77
А.3. Задача пружно-пластичної поведінки ізотропного матеріалу	105
А.4. Задача пружно-пластичної поведінки ізотропного сипкого матеріалу	140
Додаток Б. Покрокові алгоритми розв'язання задач пружно-пластичності	148
Б.1. Покроковий алгоритм – предиктор-коректор	148
Б.2. Зворотний покроковий алгоритм з розрахунком пробних напружень	152
СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНИХ ДЖЕРЕЛ ІНФОРМАЦІЇ	155

Навчальне видання

Карвацький Антон Янович

НЕЛІНІЙНІ ЗАДАЧІ МЕХАНІКИ СУЦІЛЬНИХ СЕРЕДОВИЩ

Комп'ютерний практикум з навчальної дисципліни

Навчальний посібник

В авторській редакції